# 変形勾配の弾塑性乗算分解に基づく有限変形解析コードの開発とその精度検証

○東北大学工学部 学生員 窪田 友也
東北大学大学院工学研究科 正 員 京谷 孝史
東北大学大学院工学研究科 正 員 山田 正太郎
東北大学大学院工学研究科 正 員 松原 成志朗

## 1 はじめに

変形勾配の乗算分解に基づく弾塑性有限変形解析コードを開発した．山川ら [1] に倣い Cam-clay モデルについて，Return-mapping アルゴリズムを用いた陰的応力更新法とそれに整合する接線係数を用いた．また，圧縮性を有する弾性構成則を用いても塑性が卓越すると非圧縮条件が課させるような材料では体積ロッキング現象は発現しうる．このような材料の体積ロッキング現象の回避を含め，開発したコードの精度検証を行った．

## 2 弾塑性モデル

### 2.1 諸量の定義

本研究においては，変形勾配の乗算分解に基づく弾塑性有限変形理論に基づいて定式化を進める．次式のように変形勾配 $\boldsymbol{F}$ を弾性変形勾配 $\boldsymbol{F}^e$ と塑性変形勾配 $\boldsymbol{F}^p$ へ乗算分解する．

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^e\boldsymbol{F}^p \tag{1}$$

このとき，塑性変形勾配 $\boldsymbol{F}^p$ は基準配置から中間配置，弾性変形勾配 $\boldsymbol{F}^e$ は中間配置から現在配置への変形を表す．

弾性右 Cauchy-Green テンソル $\boldsymbol{C}^e$，中間配置を参照とする第 2Piola-Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{S}^e$，Mandel 応力 $\boldsymbol{M}^p$ および塑性速度勾配 $\boldsymbol{l}^p$ を次式のように定義する．

$$\boldsymbol{C}^e := \boldsymbol{F}^{e\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^e \tag{2}$$
$$\boldsymbol{S}^e := \boldsymbol{F}^{e-1}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{F}^{e-\mathrm{T}} \tag{3}$$
$$\boldsymbol{M}^p := \boldsymbol{F}^{e\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{F}^{e-\mathrm{T}} \tag{4}$$
$$\boldsymbol{l}^p := \dot{\boldsymbol{F}}^p\boldsymbol{F}^{p-1} \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{\tau}$ は現在配置を参照とする Kirchhoff 応力である．上記の塑性速度勾配 $\boldsymbol{l}^p$ と Mandel 応力 $\boldsymbol{M}^p$ は塑性散逸仕事において共役の関係にあり，後述する塑性流れ則などの記述に用いる．

### 2.2 超弾性構成則

超弾性ポテンシャル関数 $\Psi$ として，弾性体積変化率 $J^e(:=\det\boldsymbol{F}^e)$ および弾性右 Cauchy-Green テンソルの等積変形成分 $\hat{\boldsymbol{C}}^e(:=J^{-2/3}\boldsymbol{C}^e)$ を用いた次式の関数を考える．

$$\Psi(J^e,\hat{\boldsymbol{C}}^e) = \bar{p}_r\tilde{\kappa}^*(1-\exp(z)) \tag{6}$$
$$z = -\frac{1}{\tilde{\kappa}^*}\ln\frac{J^e}{J} - \frac{\mu_0^e}{2\bar{p}_r\tilde{\kappa}^*}\left(\mathrm{tr}\hat{\boldsymbol{C}}^e - 3\right) \tag{7}$$

ここで，$\bar{p}_r$ は基準応力，$\tilde{\kappa}^*$ は弾性圧縮指数，$\mu_0^e$ は基準応力におけるせん断弾性係数，$J(:=\det\boldsymbol{F})$ は体積変化率である．

式 (6) を $\frac{1}{2}\boldsymbol{C}^e$ で一階偏微分すると中間配置を参照する第 2Piola-Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{S}^e$ が，二階偏微分すると中間配置を参照する超弾性接線係数 $\mathbb{C}^e$ が次式のように得られる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^e &= 2\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{C}^e}\\ &= \bar{p}_r\exp(z)\boldsymbol{x}\\ \mathbb{C}^e &= 4\frac{\partial^2\Psi}{\partial\boldsymbol{C}^{e2}}\\ &= -\bar{p}_r\exp(z)\left(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{x} + 2\mathbb{N} - \frac{2\mu_0}{3\bar{p}_r}(J^e)^{-2/3}\hat{\mathbb{C}}^e\right)\end{aligned} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{C}^e)^{-1} + \frac{\mu_0}{\bar{p}_r}(J^e)^{-2/3}\left(\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^e)(\boldsymbol{C}^e)^{-1}\right) \tag{9}$$

$$\hat{\mathbb{C}}^e = \Big(\boldsymbol{I}\otimes(\boldsymbol{C}^e)^{-1} + (\boldsymbol{C}^e)^{-1}\otimes\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^e)\left((\boldsymbol{C}^e)^{-1}\otimes(\boldsymbol{C}^e)^{-1} - 3\mathbb{N}\right)\Big) \tag{10}$$

$$(\mathbb{N})_{ijkl} = \left((\boldsymbol{C}^e)^{-1}\right)_{ik}\otimes\left((\boldsymbol{C}^e)^{-1}\right)_{jl} \tag{11}$$

ここで，$\boldsymbol{I}$ は単位テンソルである．

### 2.3 硬化則および降伏関数

Cam-clay モデルを使用するため，塑性体積変化に基づいて硬化・軟化をする次の等方硬化則を用いることを考える．

$$\bar{P}_c := \bar{P}_{c0}(J^p)^{-\Theta} \tag{12}$$
$$\Theta := \frac{1}{\tilde{\lambda}^* - \tilde{\kappa}^*} \tag{13}$$

ここで，$\bar{P}\left(:=\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}^p)\right)$ は Mandel 平均垂直応力，$\bar{P}_c$ は圧密降伏応力，$\bar{P}_{c0}$ は初期圧密降伏応力，$\tilde{\lambda}^*$ は圧縮指数，$\tilde{\kappa}^*$ は膨張指数である．

圧密降伏応力 $\bar{P}_c$ の変化による硬化・軟化に対応し，楕円形の降伏曲面が等方的に拡大・縮小することを考慮し次の降伏関数を考える．

$$f := \frac{\bar{P}}{\bar{P}_{c0}}\left(1 + \frac{\bar{Q}}{\bar{P}\mathrm{M}^2}\right) - \frac{\bar{P}_c}{\bar{P}_{c0}} \tag{14}$$

ここで $\bar{Q}\left(:=\sqrt{\frac{3}{2}}\|\mathrm{dev}\boldsymbol{M}^p\|\right)$ は Mandel せん断応力，$\mathrm{dev}\boldsymbol{M}^p\left(:=\boldsymbol{M}^p - \bar{P}\boldsymbol{I}\right)$ は応力の偏差成分，M は限界状態における応力比である．

### 2.4 塑性流れ則

塑性流れ則を次式で与える．

$$\boldsymbol{l}^p = \dot{\gamma}\frac{\partial g}{\partial\boldsymbol{M}^p} \tag{15}$$

ここで，$\dot{\gamma}$ は塑性乗数である．また，$g$ は塑性ポテンシャル関数であり，降伏関数と同じ関数を用いる ($f = g$)．

## 3 Return-mapping による陰的応力更新

第 2 節で述べた有限変形弾塑性モデルを数値解析で解くために，Return-mapping アルゴリズムを採用する．速度形で与えられる変数に関し時間離散化および陰的近似を行い，次ステップの未知の応力について陰的に解き，負荷基準を満たす応力状態を求める．

### 3.1 塑性流れ則の時間離散化

増分解析において第 $n$ ステップの時刻 $t_n$ における応力が既知であり，時刻 $\Delta t$ 後の第 $n+1$ ステップの変形勾配 $\boldsymbol{F}_{n+1}$ が与えられる場合を考える．速度形で与えられる塑性流れ則 (15) に関して時間離散化を考える．式 (5)，(15) より，塑性変形勾配の発展則が塑性変形勾配 $\boldsymbol{F}^p$ を用いて，次式のように表される．

$$\dot{\boldsymbol{F}}^p = \dot{\gamma}\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{M}^p}\boldsymbol{F}^p \tag{16}$$

$\boldsymbol{l}^p$ が $\Delta t$ 間で変化しないものとして時間離散化を行い次式を得る．このとき，実際には $\boldsymbol{l}^p$ は $\Delta t$ 間で変化するが，ここでは $\boldsymbol{l}^p_{n+1}$ と近似する．

$$\boldsymbol{F}^p_{n+1} = \exp\left(\Delta\gamma\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{M}^p}\right)\boldsymbol{F}^p_n \tag{17}$$

式 (17) を整理し，$\boldsymbol{F}^e$ に関する次式を得る．

$$\boldsymbol{F}^e_{n+1} = \boldsymbol{F}^{e(\mathrm{tr})}_{n+1}\exp\left(-\Delta\gamma\left.\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{M}^p}\right|_{n+1}\right) \tag{18}$$

ここで，$\boldsymbol{F}^{e(\mathrm{tr})}_{n+1}\left(:= \boldsymbol{F}_{n+1}\boldsymbol{F}^{p-1}_n\right)$ は塑性変形が生じないとした時の試行弾性変形勾配であり，$\Delta\gamma := \dot{\gamma}\Delta t$ と仮定している．

### 3.2 負荷判定

負荷判定にあたり，試行弾性変形勾配 $\boldsymbol{F}^{e(\mathrm{tr})}$ から試行弾性右 Cauchy-Green テンソル $\boldsymbol{C}^{e(\mathrm{tr})}$，試行応力 $\boldsymbol{\tau}^{(\mathrm{tr})}$ を計算する．これらの試行値を降伏関数式 (14) に代入し $f^{(\mathrm{tr})}_{n+1} > 0$ で塑性負荷と判定する．塑性負荷と判定された場合，Return-mapping により $f_{n+1} = 0$ を満たすように応力を決定する．

### 3.3 Return-mapping

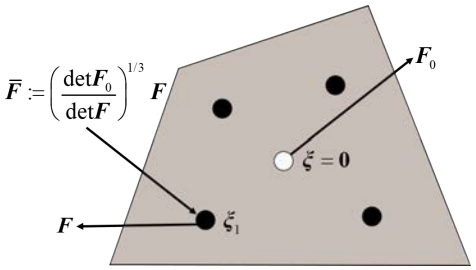
式 (18) から弾性右 Cauchy-Green テンソル $\boldsymbol{C}^e_{n+1}$ の更新式を次に示す．

$$\boldsymbol{C}^e_{n+1} = \exp\left(-\Delta\gamma\left.\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{M}^p}\right|_{n+1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{e(\mathrm{tr})}_{n+1}\exp\left(-\Delta\gamma\left.\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{M}^p}\right|_{n+1}\right) \tag{19}$$

塑性負荷の判定時，式 (19)，$f_{n+1} = 0$ の連立方程式を Newton-Raphson 法を利用して反復計算によって解く．

## 4 体積ロッキング現象とその対策

Cam-clay model は限界状態において非圧縮性 ($\det\boldsymbol{F} = 1$) を示すため，変形が進展し塑性変形が卓越する際に体積ロッキング現象が生じると考えられる．体積ロッキング現象の解消のために，F-bar 要素 [2] を採用する．




**図–1** F-bar 法

応力更新を用いる各積分点での変形勾配 $\boldsymbol{F}$ を要素中心における変形勾配 $\boldsymbol{F}_0$ を用いて，修正変形勾配 $\bar{\boldsymbol{F}}$ として定義し直すものである．修正変形勾配 $\bar{\boldsymbol{F}}$ をその積分点における変形勾配として用いて応力・接線係数などを計算する．そのため，非圧縮性の制約が要素全体に平均化され個々の積分点の制約が緩くなる．修正変形勾配 $\bar{\boldsymbol{F}}$ を次式に示す．

$$\bar{\boldsymbol{F}} = \left(\frac{\det\boldsymbol{F}_0}{\det\boldsymbol{F}}\right)^{1/3}\boldsymbol{F} \tag{20}$$

## 5 解析例および結論

解析例および結論は研究発表時に述べる．

### 参考文献

1) 山川優樹, 山口洋介, 橋口公一, 池田清宏, 拡張下負荷面 Camclay モデルの有限変形理論に基づく定式化とリターンマッピングを用いた陰的応力更新法，応用力学論文集 Vol.13, pp.411-422, 2010.
2) E. A. de SOUZA NETO, D. PERIC, M. DUTKO and D. R. J. OWEN : Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids, *Int. J. Solids Structures* Vol. 33 No. 20-22, pp. 3277-3296, 1996.