熱注入によるゴムの損傷回復現象の数値シミュレーション

○東北大学工学部　学生員　野崎 陽明
東北大学大学院工学研究科　正　員　山田 正太郎
東北大学大学院工学研究科　正　員　京谷 孝史
東北大学大学院工学研究科　正　員　松原 成志朗

1. はじめに

ゴム材料に対し，繰り返し負荷を与えると損傷に起因する Mullins 効果 [1] と称される履歴曲線が描かれる．また，ゴム材料は時間経過とともに損傷が回復する現象 (healing 現象) が生じることが知られている．さらに熱を与えることで損傷の回復が促進されるとの報告もある [2]．そこで本研究では Mullins 効果を超弾性構成則と損傷理論により記述したモデル [3)4)] をベースに，熱注入による損傷回復現象をモデル化する．さらに，同モデルを組み込んだ有限変形理論に基づく有限要素解析コードを開発し，実際に数値シミュレーションを行う．

2. 材料モデル

本研究で対象とする純ゴムは，一般に体積変形をしないことが知られている．よって非圧縮性を近似するための圧縮性超弾性モデルとしてひずみエネルギー関数 $\Psi(\boldsymbol{C})$ を等容変形成分 $\Psi(\widehat{\boldsymbol{C}})$ と体積変化成分 $U(J)$ の和に分解する．

$$\Psi(\boldsymbol{C}) = \Psi(\widehat{\boldsymbol{C}}) + U(J)\,; \quad \widehat{\boldsymbol{C}} = (\det\boldsymbol{C})^{-1/3}\boldsymbol{C} \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{C}$ は右 Cauchy-Green-Tensor，J は変形勾配テンソル $\boldsymbol{F}$ のヤコビアンである．

損傷が等容変形成分にのみ影響を与えていると仮定し，次式のようにエネルギー関数を再定義する．

$$\Psi(\widehat{\boldsymbol{C}}, J, \zeta) = (1-\zeta)\Psi_0(\widehat{\boldsymbol{C}}) + U(J) \tag{2}$$

ここで，$\Psi_0(\widehat{\boldsymbol{C}})$ は，無損傷状態におけるひずみエネルギー関数の等容変形成分である．ζ は損傷変数であり，以下のように定義する．

$$\zeta = \zeta(\alpha) = \zeta_\infty[1-\exp(-\alpha/\iota)] \tag{3}$$

$$\alpha(t) = \max_{s\in[0,t]} \widehat{\Psi}_0(s) \tag{4}$$

ここで，ζ_∞, ι は材料定数である，α は $\boldsymbol{C}$ 空間に描かれる損傷曲面の大きさを表しており，今までに受けたひずみの最大値を記憶する変数である．等容変形による接線係数 $\widehat{\mathcal{C}}$ を計算すれば，以下のようになる．

$$\widehat{\mathcal{C}} = \begin{cases} (1-\zeta)\widehat{\mathcal{C}}_0 - \zeta'(\alpha)\boldsymbol{S}'_0 \otimes \boldsymbol{S}'_0 & \phi = 0 \text{ and } \dot{f} > 0 \\ (1-\zeta)\widehat{\mathcal{C}}_0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}$$

$$\widehat{\mathcal{C}}_0 = 4\frac{\partial^2\widehat{\Psi}_0}{\partial\boldsymbol{C}\partial\boldsymbol{C}} \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{S}'_0$ は無損傷状態での等容変形に起因する second Piola-Kirchhoff 応力の偏差成分，ϕ は損傷関数，f は損傷の発展を支配する熱力学による力を表し，それぞれ以下のように与えられる．

$$\boldsymbol{S}'_0 = 2\frac{\partial\widehat{\Psi}_0}{\partial\boldsymbol{C}} \tag{7}$$

$$f(\boldsymbol{C}) = \Psi_0(\widehat{\boldsymbol{C}}) \tag{8}$$

$$\phi(\boldsymbol{C}, \alpha) = f(\boldsymbol{C}) - \alpha \tag{9}$$

3. 損傷回復モデル

従来のモデルでは損傷が進展する．すなわち損傷曲面の大きさ α が大きくなることしか考えられていないが，今回のモデルでは，損傷曲面の大きさ α を熱注入によって小さくさせることで損傷回復させる．今回のモデルでは損傷曲面の発展則 $\dot{\alpha}$ 以下のように定義する．

$$\dot{\alpha} = \begin{cases} \langle \dot{f} \rangle & \phi = 0 \\ -\dot{\lambda}(\alpha - f)\dfrac{\langle \Theta - \Theta_r \rangle}{\Theta_r} & \phi < 0 \end{cases} \tag{10}$$

ここで，Θ は物質点における絶対温度，$\dot{\lambda}$ は損傷回復速度を決めるパラメーター，Θ_r は参照温度である．今回のモデルでは $\Theta > \Theta_r$ のときに損傷の回復が生じる．また，物質点での温度が高く，ϕ が大きいほど，損傷回復速度が大きいモデルとなっている．ただし，$\phi > 0$ となるような回復は生じないことを注意する．なお，損傷の進展は従来のモデルと同様に生じる．

4. 数値解析例

次に，上記のモデルを用いた有限要素法による数値解析例を示す．1 次のアイソパラメトリック要素を用いた有限要素法では，式 (2) のように与えられるモデルを非圧縮に近い条件で用いるとき体積ロッキングが生じることが知られている．これを回避するために，以下の通り Hu-Washizu の変分原理に基づく，Mean Dialataion Method を用いて内

Key Words: 超弾性，損傷理論，Mullins 効果，Healing 現象
〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, TEL 022-795-7489

力の線形化を行った．

$$
\begin{aligned}
D\delta\overline{W}_{\text{int}}(\phi,\delta\boldsymbol{v})[\boldsymbol{u}] = & \int_V D\boldsymbol{E}[\delta\boldsymbol{v}] : (\widehat{\mathcal{C}} + \mathcal{C}_p) : D\boldsymbol{E}[\boldsymbol{u}]\,dV \\
& + \int_V \boldsymbol{S} : [(\nabla_0\boldsymbol{u})^T(\nabla_0\delta\boldsymbol{v})]\,dV \\
& + Dp[\boldsymbol{u}]\int_V D\boldsymbol{E}[\delta\boldsymbol{v}] : J\boldsymbol{C}^{-1}\,dV
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}' + pJ\boldsymbol{C}^{-1}; \quad \boldsymbol{S}' = 2\frac{\partial\widehat{\Psi}}{\partial\boldsymbol{C}}; \quad p = \frac{dU(\bar{J})}{d\bar{J}} \tag{12}$$

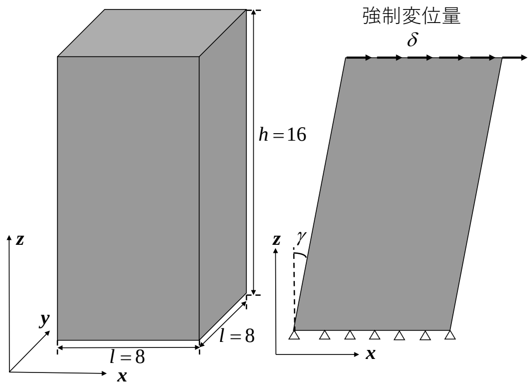
$$\widehat{\mathcal{C}} = 4\frac{\partial^2\widehat{\Psi}}{\partial\boldsymbol{C}\partial\boldsymbol{C}} \tag{13}$$

$$\mathcal{C}_p = pJ[\boldsymbol{C}^{-1}\otimes\boldsymbol{C}^{-1} - 2\mathcal{I}]; \quad \mathcal{I} = \frac{\partial\boldsymbol{C}^{-1}}{\partial\boldsymbol{C}} \tag{14}$$

$$Dp[\boldsymbol{u}] = \bar{\kappa}\frac{1}{v}\int_v \mathrm{div}\boldsymbol{u}\,dv; \quad \bar{\kappa} = \frac{v}{V}\left.\frac{d^2U}{d\bar{J}^2}\right|_{\bar{J}=v/V} \tag{15}$$

ここで，V と v はそれぞれ変形前後の要素の体積，$\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{S}'$ は second Piola-Kirchhoff 応力とその偏差成分，p は Cauchy 応力の等方成分である．

次に解析対象とするモデルと境界条件を**図–1** に示す．ゴムからなる供試体が単純せん断変形を受ける場合を想定した計 128 要素 (= 4 × 4 × 8) の立方体要素を用いた．



図–1 解析モデル

今回解析する超弾性モデルは圧縮性 neo-Hooken モデルとした．採用した $\Psi_0(\widehat{\boldsymbol{C}})$ と $U(J)$ を以下に示す．

$$\Psi_0(\widehat{\boldsymbol{C}}) = \frac{1}{2}\mu\left(\mathrm{tr}(\widehat{\boldsymbol{C}}) - 3\right); \quad U(J) = \frac{1}{2}\kappa(J-1)^2 \tag{16}$$

強制変位 $\delta = 15$ まで与えた後，$\delta = 0$ まで戻す載荷を計 4 回繰り返した．3 回目の載荷直前に 5 時間，4 回目の載荷直前に 2 時間，ともに $\Theta = 400$ K の温度を供試体全体に一様に与えた．

解析対象を一つのの要素と見做した上で，せん断応力 τ と工学せん断ひずみ γ を次式により算出した．

$$\gamma = \arctan\left(\frac{\delta}{h}\right) \tag{17}$$

$$\tau = \frac{F}{A} \tag{18}$$

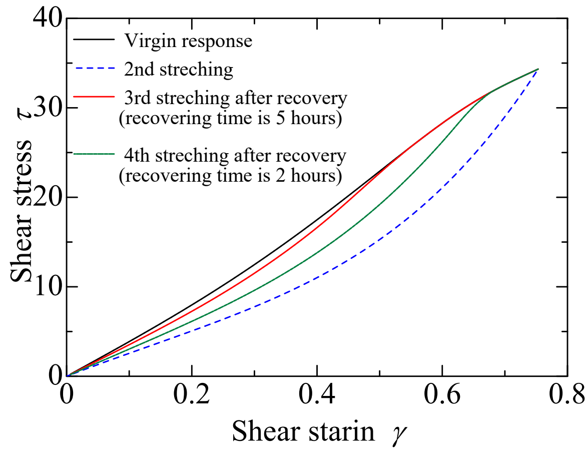
ここで，F は解析モデル上面における x 方向の節点力の和，A は上面の断面積である．

今回解析に使用した材料定数の数値を**表–1** にまとめる．

表–1 材料定数

材料定数	値
せん断弾性係数 μ	100.0 J
非圧縮性パラメーター κ	166.667 J
最大損傷度 ζ_∞	0.80
損傷飽和パラメーター ι	50 J
参照温度 Θ_r	300 K
損傷回復発展指数 λ	1.0 /hour

図–2 には各回の載荷時の挙動のみ示した．



図–2 解析結果

2 回目の載荷は初回の剛性を下まわる剛性を示しながら除荷開始点まで戻っており，Mullins 効果が再現されている．一方で，3 回目や 4 回目では，温めて損傷の回復を促したことにより，剛性が回復している様子を見て取ることができる．

5. 結論

本研究では，熱注入によるゴムの損傷回復モデルを構築した上でゴム供試体の損傷回復シミュレーションを行った．熱を注入することによって損傷の回復の度合いが異なることが再現できた．今後は免震ゴムの損傷回復への応用を視野に研究を進めたい．

参考文献

1) Mullins, L : Effect of streching on the properties of rubber, *Journal of Rubber Research* **16**,275-289. [1947]
2) Plagge, J. , and Klüppel, M. : Mullins effect revisited: Relaxation, recovery and high-strain damage, *Materials Today Communications* **20**, [2019]
3) Simo, J. C. : On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model; Formulation and computational aspects, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **60**, 153-173. [1987]
4) Holzapfel, G. A. : Nonlinear Solid Mechanics, *A Continuum Approach for Enineering*, Wiley, pp.295-304, [2000]