非硬化塑性ひずみ領域を導入した非古典弾塑性構成則の定式化と応力計算法の開発

東北大学　学生会員　○ 佐藤 大貴
東北大学　正会員　山川 優樹
東北大学　フェロー会員　池田 清宏

1. はじめに

非硬化塑性ひずみ領域は，繰返し変形中のヒステリシスループの安定化が一時的なものであり，負荷経路の変化によりループが変動し得ることを弾塑性構成則で再現することを目的として Ohno[1] により提案された．この領域は塑性ひずみ空間において，その内部で等方硬化が発展せず移動硬化のみが発展する領域である．本研究では非古典弾塑性構成則の一種である下負荷面モデル [2] に非硬化塑性ひずみ領域を導入し，さらに微小変形理論の枠組みで超弾性構成則をベースとした von Mises 型弾塑性構成則の再定式化を行う．また，リターンマッピングによる応力計算アルゴリズムを開発する．その際，非硬化塑性ひずみ領域による硬化/非硬化の判定と諸量の更新をリターンマッピングの過程で反復的に行うという新たな手法を導入する．

2. 構成則の定式化

非古典弾塑性構成則は井口ら [3] による拡張下負荷面モデルを用いる．修正応力を，背応力 $\boldsymbol{\alpha}$，正規降伏面と下負荷面の相似中心である弾性核 $\boldsymbol{c}$，正規降伏面に対する下負荷面の大きさの比 R を用いて以下で定義する．

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{mod}} = \boldsymbol{\sigma} - \{\boldsymbol{c} - R(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{\alpha})\} \tag{1}$$

Ohno[1] の非硬化塑性ひずみ領域を拡張下負荷面モデルに対応させ再定式化した式は以下の通りである．

$$g_{\mathrm{nhr}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, \boldsymbol{\beta}, \rho) = \sqrt{\frac{2}{3}}\|\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} - \boldsymbol{\beta}\| - \rho \leq 0 \tag{2}$$

$$\dot{\rho} = \dot{\lambda}\gamma_{\rho}, \quad \gamma_{\rho} = \sqrt{\frac{2}{3}} c^{\mathrm{nhr}}\Gamma^{\mathrm{nhr}} \tag{3}$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\lambda}\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\beta}}, \quad \boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\beta}} = \sqrt{\frac{2}{3}}(1 - c^{\mathrm{nhr}})\Gamma^{\mathrm{nhr}}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} - \boldsymbol{\beta}}{\rho} \tag{4}$$

$$\Gamma^{\mathrm{nhr}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} - \boldsymbol{\beta}}{\rho} : \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}{\dot{\lambda}} & g_{\mathrm{nhr}} = 0 \text{ and } \frac{\partial g_{\mathrm{nhr}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} > 0 \\ 0 & g_{\mathrm{nhr}} < 0 \text{ and } \frac{\partial g_{\mathrm{nhr}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} \leq 0 \end{cases} \tag{5}$$

$$G_{\mathrm{k}} = G_{\mathrm{k}0} + \frac{2}{3}(1 - \Gamma^{\mathrm{nhr}})\frac{\partial q}{\partial \xi} \tag{6}$$

硬化に関する塑性内部状態変数 Γ^{nhr} を用いて，等方硬化，移動硬化に関するひずみの発展則を以下のように定義する．

$$\dot{\xi} = \dot{\lambda}\gamma^{\mathrm{p}}_{\mathrm{i}}, \quad \gamma^{\mathrm{p}}_{\mathrm{i}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\Gamma^{\mathrm{nhr}} \tag{7}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{kd}} = \dot{\lambda}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{k}}, \quad \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{k}} = \frac{b_{\mathrm{k}}}{G_{\mathrm{k}}}\boldsymbol{\alpha} \tag{8}$$

その他の内部変数の発展則は省略する．

3. リターンマッピングアルゴリズム

井口ら [3] と同様の負荷判定により塑性負荷と判定された場合，非硬化塑性ひずみ領域による判定を行い $\Gamma^{\mathrm{nhr}}_{n+1}$ を求め，リターンマッピング方程式を更新し収束判定を行う．

所与のひずみ増分に対応する時間区間 $[t_n, t_{n+1}]$ におけるリターンマッピング方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}_1 := \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p},(\mathrm{tri})}_{n+1} - \Delta\lambda\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{p}}_{n+1} = \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{Y}_2 := \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{kd},n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p},(\mathrm{tri})}_{\mathrm{kd},n+1} - \Delta\lambda\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{k},n+1} = \boldsymbol{O} \\ Y_3 := \xi_{n+1} - \xi^{(\mathrm{tri})}_{n+1} - \Delta\lambda\gamma^{\mathrm{p}}_{\mathrm{i},n+1} = 0 \\ \boldsymbol{Y}_4 := \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{cd},n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p},(\mathrm{tri})}_{\mathrm{cd},n+1} - \Delta\lambda\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{c},n+1} = \boldsymbol{O} \\ Y_5 := R_{n+1} - R^{(\mathrm{tri})}_{n+1} - \Delta\lambda U_{n+1} = 0 \\ Y_6 := \sqrt{\frac{3}{2}}\left\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}_{\mathrm{mod},n+1}\right\| - R_{n+1}q_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

非硬化塑性ひずみ領域を用いた硬化/非硬化の判定は，図–1 のように塑性ひずみの試行値と更新値 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p},(\mathrm{tri})}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}$ と $g_{\mathrm{nhr}} \leq 0$ で表される非硬化塑性ひずみ領域との位置関係により行う．

$$\begin{cases} g_{\mathrm{nhr}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p},(\mathrm{tri})}_{n+1}) \leq 0 \text{ and } g_{\mathrm{nhr}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}) \leq 0 & \rightsquigarrow \text{第 (1) 節} \\ g_{\mathrm{nhr}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p},(\mathrm{tri})}_{n+1}) = 0 \text{ and } g_{\mathrm{nhr}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}) > 0 & \rightsquigarrow \text{第 (2) 節} \\ g_{\mathrm{nhr}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p},(\mathrm{tri})}_{n+1}) < 0 \text{ and } g_{\mathrm{nhr}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}) > 0 & \rightsquigarrow \text{第 (3) 節} \end{cases}$$

(1)　区間 $[t_n, t_{n+1}]$ で非硬化

非硬化塑性ひずみ領域は拡大せず非硬化であるため，$\Gamma^{\mathrm{nhr}}_{n+1} = 0$ を用いて式 (9) を更新する．

(2)　区間 $[t_n, t_{n+1}]$ で硬化

非硬化塑性ひずみ領域は区間全体 $[t_n, t_{n+1}]$ で拡大するため，式 (10) を反復的に解き $\rho_{n+1}, \boldsymbol{\beta}_{n+1}, \Delta\lambda_*, \Gamma^{\mathrm{nhr}}_{n+1}$ を求める．

$$\begin{cases} \Gamma^{\mathrm{nhr}}_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}}{\rho_{n+1}} : \frac{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}{\Delta\lambda_*} \\ Y_1 := \rho_{n+1} - \rho^{(\mathrm{tri})}_{n+1} - \Delta\lambda_*\gamma_{\rho} = 0 \\ \boldsymbol{Y}_2 := \boldsymbol{\beta}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}^{(\mathrm{tri})}_{n+1} - \Delta\lambda_*\boldsymbol{\gamma}_{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{O} \\ Y_3 := \sqrt{\frac{2}{3}}\|\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} - \boldsymbol{\beta}_{n+1}\| - \rho_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

非硬化塑性ひずみ領域は塑性ひずみの更新値 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}$ に追従するため $\Delta\lambda_* = \Delta\lambda$ であり．$\Delta\lambda_*$ は計算の都合で仮想的に求めている．また，求めた $\Gamma^{\mathrm{nhr}}_{n+1}$ を用いて式 (9) を更新する．

(3)　区間 $[t_n, t_{n+1}]$ 内で非硬化から硬化へ遷移

図–1 中の区間 $[t_n, t_\star]$，区間 $[t_\star, t_{n+1}]$ において塑性ひずみ空間を塑性ひずみ点が移動するとき，それぞれの区間で非硬化，硬化であるため $\Gamma^{\mathrm{nhr}}_{n+1}$ が 1 ステップ内で変化する．ここで非硬化から硬化へ遷移する時点を $t_\star (t_n < t_\star < t_{n+1})$ と定義している．以下では非硬化塑性ひずみ領域を用いて式

Key Words: 弾塑性構成則, 非硬化塑性ひずみ領域, リターンマッピング, ヒステリシスループの安定化
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, Phone: 022-795-7417, E-mail: yuki.yamakawa.c7@tohoku.ac.jp

(9) を分解し，反復的に時刻 $t_\star$ における諸量を求め，それを用いて区間 $[t_\star, t_{n+1}]$ のリターンマッピング方程式を更新する手順を示す．

(a) 非硬化塑性ひずみ領域の更新値と塑性乗数の分解

第 (2) 節と同様に，現塑性ひずみ点に追従するように式 (10) を反復的に解き非硬化塑性ひずみ領域の更新値を求める．ただし，ここでの $\Delta\lambda_*$ は塑性乗数の非硬化塑性ひずみ領域の拡大に寄与する部分，すなわち塑性乗数の硬化部 $\Delta\lambda_{\rm hr} = \Delta\lambda_*$ である．したがって塑性乗数の非硬化部は以下の通りである．

$$\Delta\lambda_{\rm nhr} = \Delta\lambda - \Delta\lambda_{\rm hr} = \Delta\lambda - \Delta\lambda_* \tag{11}$$

(b) 非硬化区間 $[t_n, t_\star]$ の連立方程式

塑性乗数の非硬化部 $\Delta\lambda_{\rm nhr}$ と $\Gamma^{\rm nhr}_{n+1} = 0$ を用いて，式 (9) を分解し非硬化区間 $[t_n, t_\star]$ の連立方程式を立てる．

$$\left\{\begin{array}{l}
\boldsymbol{Y}_1 := \boldsymbol{\varepsilon}^{\rm p}_\star - \boldsymbol{\varepsilon}^{\rm p,(tri)}_{n+1} - \Delta\lambda_{\rm nhr}\boldsymbol{\gamma}^{\rm p}_\star = \mathbf{O}\\
\boldsymbol{Y}_2 := \boldsymbol{\varepsilon}^{\rm p}_{{\rm kd},\star} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\rm p,(tri)}_{{\rm kd},n+1} - \Delta\lambda_{\rm nhr}\boldsymbol{\gamma}^{\rm p}_{{\rm k},\star} = \mathbf{O}\\
Y_3 := \xi_\star - \xi^{\rm (tri)}_{n+1} - \Delta\lambda_{\rm nhr}\gamma^{\rm p}_{{\rm i},\star} = 0\\
\boldsymbol{Y}_4 := \boldsymbol{\varepsilon}^{\rm p}_{{\rm cd},\star} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\rm p,(tri)}_{{\rm cd},n+1} - \Delta\lambda_{\rm nhr}\boldsymbol{\gamma}^{\rm p}_{{\rm c},\star} = \mathbf{O}\\
Y_5 := R_\star - R^{\rm (tri)}_{n+1} - \Delta\lambda_{\rm nhr}U_\star = 0\\
Y_6 := \sqrt{\frac{3}{2}}\left\|\boldsymbol{\sigma}^{\rm dev}_{{\rm mod},\star}\right\| - R_\star q_\star = 0
\end{array}\right. \tag{12}$$

式 (12) を反復的に解き，$t_\star$ における塑性ひずみ諸量とひずみ増分の非硬化部 $\Delta\bar{\varepsilon}_{\rm nhr}$ を求める．通常のリターンマッピングでは [既知量, 未知量]=$\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\lambda\}$ であるが，ここでは [既知量, 未知量]=$\{\Delta\lambda_{\rm nhr}, \Delta\bar{\varepsilon}_{\rm nhr}\}$ である．

(c) 硬化区間 $[t_\star, t_{n+1}]$ の連立方程式

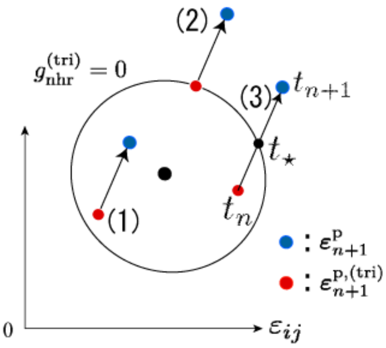
時刻 $t_\star$ の塑性ひずみ諸量と第 (a) 節で求めた $\Gamma^{\rm nhr}_{n+1}$ を用いて，区間 $[t_\star, t_{n+1}]$ の連立方程式を立てる．

$$\left\{\begin{array}{l}
\boldsymbol{Y}_1 := \boldsymbol{\varepsilon}^{\rm p}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\rm p}_\star - \Delta\lambda_{\rm hr}\boldsymbol{\gamma}^{\rm p}_{n+1} = \mathbf{O}\\
\boldsymbol{Y}_2 := \boldsymbol{\varepsilon}^{\rm p}_{{\rm kd},n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\rm p}_{{\rm kd},\star} - \Delta\lambda_{\rm hr}\boldsymbol{\gamma}^{\rm p}_{{\rm k},n+1} = \mathbf{O}\\
Y_3 := \xi_{n+1} - \xi_\star - \Delta\lambda_{\rm hr}\gamma^{\rm p}_{{\rm i},n+1} = 0\\
\boldsymbol{Y}_4 := \boldsymbol{\varepsilon}^{\rm p}_{{\rm cd},n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\rm p}_{{\rm cd},\star} - \Delta\lambda_{\rm hr}\boldsymbol{\gamma}^{\rm p}_{{\rm c},n+1} = \mathbf{O}\\
Y_5 := R_{n+1} - R_\star - \Delta\lambda_{\rm hr}U_{n+1} = 0\\
Y_6 := \sqrt{\frac{3}{2}}\left\|\boldsymbol{\sigma}^{\rm dev}_{{\rm mod},n+1}\right\| - R_{n+1}q_{n+1} = 0
\end{array}\right. \tag{13}$$

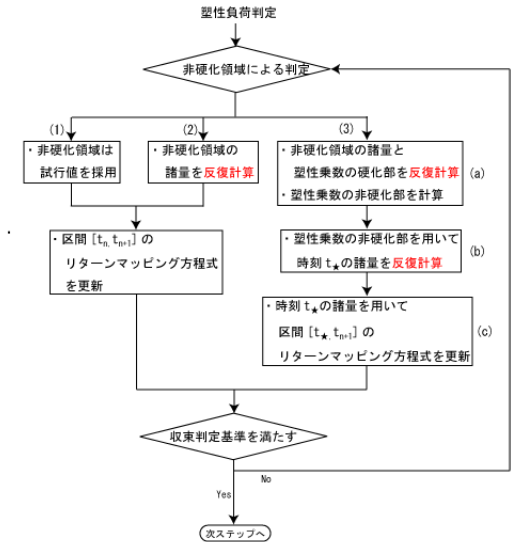
式 (13) が第 (3) 節の手順により更新されたリターンマッピング方程式である．

4. 数値計算例

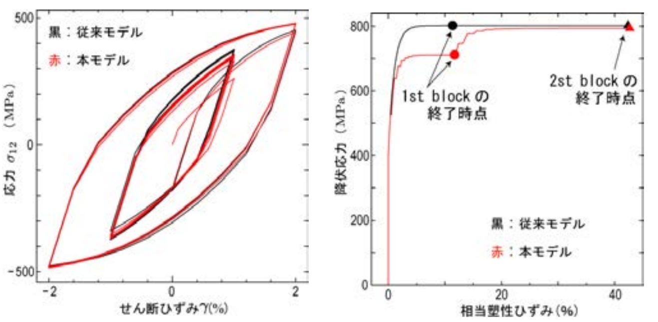
図–3(a) は，繰返し単純せん断をひずみ振幅 $[-1\%, 1\%]$ で 10 サイクル与えた (1st block) 後，より大きな振幅 $[-2\%, 2\%]$ で 10 サイクル与えた (2nd block) 時の応力-せん断ひずみ経路である．ここでは従来モデルと本モデルはほぼ同等に硬化し，ヒステリシスループは block 毎に定常に近づいた．しかし降伏応力-相当塑性ひずみ経路を示した**図–3**(b) では，従来モデルは等方硬化の飽和が一度のみで，2nd block におけるループの拡大が移動硬化のみで表現されている．一方で本モデルでは降伏応力が block 毎に段階的に増加している．



図–1 非硬化塑性ひずみ領域と塑性ひずみの位置関係．



図–2 応力計算アルゴリズムのフローチャート．



(a) ヒステリシスループ　(b) 相当塑性ひずみ-降伏応力関係

図–3 従来の拡張下負荷面モデルと本モデルとの比較．

これは一定なひずみ振幅で繰返し負荷を行うと，非硬化塑性ひずみ領域は徐々に拡大し塑性ひずみ振幅範囲の全体を占め，等方硬化の進行が一旦停滞するためである．その後再び降伏応力が増加しているのは，1st block よりも大きな振幅のひずみ入力による塑性ひずみの発展に追従して非硬化塑性ひずみ領域が拡大し，等方硬化が進行するためである．

参考文献

1) Ohno, N.: A constitutive model of cyclic plasticity with a nonhardening strain region, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 49, pp. 721–727, 1982.

2) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 25, pp. 917–945, 1989.

3) 井口拓哉, 山川優樹, 池田清宏: 微小変形理論と超弾性構成則に基づく拡張下負荷面モデルの再定式化とリターンマッピング法の開発. 日本機械学会論文集, Vol. 82, No. 841, p. 16–00197, 2016.