

せん断に伴う断面変形を考慮した梁理論に関する考察

東北大学大学院工学研究科 学生会員 鄭 勲
 東北大学大学院工学研究科 正員 齊木 功
 東北大学大学院工学研究科 正員 山本 剛大

1. 初めに

梁のせん断変形を表現できる Timoshenko 梁において断面変形の効果を間接的に考慮するためにせん断補正係数が用いられる¹⁾。しかし、断面変形を直接的に扱っていないことから、せん断力が不連続となる点では変位場の矛盾により精度が低下することが予想される。一方、著者らは均質化法と有限要素解析を用いて任意形状断面のせん断遅れ変位場を数値的に求め、梁理論に導入する半解析的手法を提案している²⁾。そこで本研究は、面外せん断とせん断遅れの両方の変位場を数値的に求め、それらを統一的に梁理論に導入する方法を提案する。

2. 面外せん断に伴う断面変形とせん断遅れを考慮した梁理論の定式化

図-1に示すような梁を解析対象とし、橋軸方向を x_1 、橋軸直角水平方向を x_2 、鉛直方向を x_3 とする正規直交座標系を設定する。

面外せん断による橋軸方向の変位を、断面のゆがみモードを表す関数 $f(x_2, x_3)$ とその大きさを表す橋軸方向の関数 $g(x_1)$ とに変数分離し、 $f(x_2, x_3)g(x_1)$ と表すこととする。すると、梁における橋軸方向の変位を、断面回転による変位と断面変形によるものの和として考え

$$u_1 = x_3 \left(\tilde{\gamma}(x_1) - \frac{du_3(x_1)}{dx_1} \right) + f(x_2, x_3)g(x_1) \quad (1)$$

と表すことができる²⁾³⁾。ここで、 u_3 は梁の x_3 軸方向のたわみ、 $\tilde{\gamma}$ は梁の面外せん断ひずみを表す。

曲げを受ける梁の全ポテンシャルエネルギーを

$$\Pi = \Pi_e - \Pi_{\text{ext}} \quad (2)$$

とする。 Π_e は梁のひずみエネルギー、 Π_{ext} は分布荷重 q によるポテンシャルであり、 Π_e 、 Π_{ext} はそれぞれ

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_V (E\epsilon^2 + G\gamma_{12}^2 + G\gamma_{13}^2) dV \quad (3)$$

$$\Pi_{\text{ext}} = \int_L qu_3 dx_1 \quad (4)$$

とする。ここで、Young 率を E 、せん断弾性係数を G 、軸ひずみを ϵ 、 x_1 - x_2 面及び x_1 - x_3 面せん断ひずみ

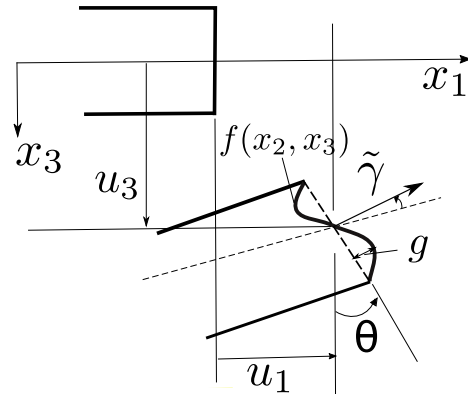


図-1 梁の変位場

をそれぞれ γ_{12} 、 γ_{13} とした。最小ポテンシャルエネルギー原理より、汎関数の停留条件 $\delta\Pi = 0$ から、 u_3 と g と $\tilde{\gamma}$ に関する微分方程式

$$-K_b \left(\frac{d\tilde{\gamma}}{dx_1} - \frac{d^2u_3}{dx_1^2} \right) - R_1 \frac{dg}{dx_1} + M = 0 \quad (5)$$

$$GkA\tilde{\gamma} - K_b \left(\frac{d^2\tilde{\gamma}}{dx_1^2} - \frac{d^3u_3}{dx_1^3} \right) - R_1 \frac{d^2g}{dx_1^2} + R_4g = 0 \quad (6)$$

$$-R_1 \left(\frac{d^2\tilde{\gamma}}{dx_1^2} - \frac{d^3u_3}{dx_1^3} \right) - R_2 \frac{d^2g}{dx_1^2} + R_3g + R_4\tilde{\gamma} = 0 \quad (7)$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned} \theta &:= \tilde{\gamma} - \frac{du_3}{dx_1} \\ R_1 &:= \int_S E x_3 f dS, \quad R_2 := \int_S E f^2 dS \\ R_3 &:= \int_S G \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \right\} dS, \quad R_4 := \int_S G \frac{\partial f}{\partial x_3} dS \\ K_s &:= \int_S G dS, \quad K_b := \int_S E x_3^2 dS \end{aligned} \quad (8)$$

と定義した。

3. 提案手法の精度検証

図-2に示す非均質断面の片持ち梁により精度検証を行う。箱梁の上下フランジとウェブが材料1であり、箱を充填するコア材を材料1と比較して $\frac{1}{10}$ 倍の剛性を有する材料2とした。フランジに対してコア材の剛性を小さくして、断面変形がより顕著になることを目論んだ。 x_1 の原点を片持ち梁の支点、 x_2 の原点を橋軸直角

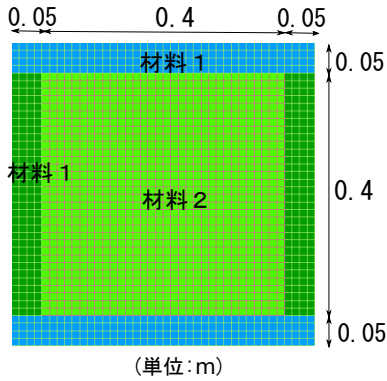


図-2 断面形状

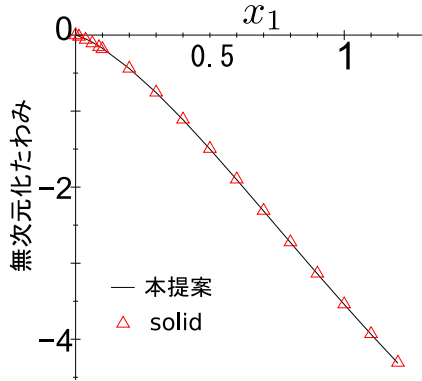


図-3 片持梁のたわみ

方向の中央， x_3 の原点を高さ方向の中央と設定した。また，梁の長さ $l = 1200 \text{ mm}$ とし等分布荷重 $q = 250 \text{ N/mm}$ をウェブに自重として载荷した。参照解とするために，1辺0.0125 mの立方体を8節点6面体ソリッド要素により分割した有限要素モデルによる解析を行った。フランジ厚は厚さ方向に2要素となり，要素総数は153,600，節点総数は163,057である。片持ち支持は，具体的には橋軸方向端部の断面上の節点をすべて完全拘束することでモデル化した。このモデルを以降solidと呼ぶ。

この断面の梁の代表体積要素を作成し，一様せん断変形を与えた。この時得られた断面の x_1 軸方向変位が面外せん断に伴う断面のゆがみモード $f(x_3)$ である。

本手法およびsolidによる軸方向位置 (x_1) と Euler-Bernoulli 梁による自由端のたわみで無次元化したたわみ u_3 の関係を図-3に示した。相対誤差を

$$\delta = \sqrt{\frac{\int_L (f - f_{\text{ref}})^2 dx_i}{\int_L f_{\text{ref}}^2 dx_i}} \quad (9)$$

と定義するとsolidのたわみに対する本手法の相対誤差は0.32%である。ここで， f は本手法による解であり， f_{ref} はsolidの解である。

軸方向位置 (x_1) と断面変形の大きさ g の関係を図-

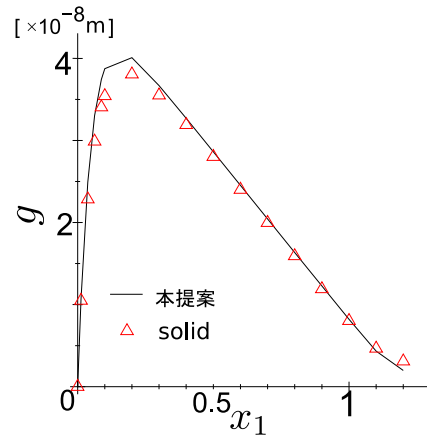


図-4 片持梁の断面変形の大きさ g

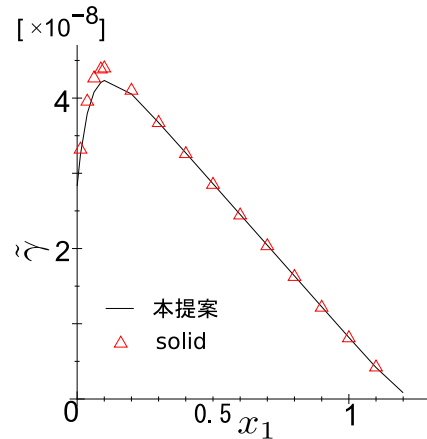


図-5 片持梁の面外せん断ひずみ γ

4に示した。ここで，solidに対する本手法の相対誤差は6.8%ある。たわみに比べて精度はよくないが，自由端から支点に向かって大きくなる傾向と，支点で変位が拘束されていることから支点付近で急激に g がゼロになることを再現できている。

軸方向位置 (x_1) と γ の関係を図-5に示した。ここで，solidに対する本手法 γ の相対誤差は2.9%である。せん断力は線形で支点上で最大となるが，断面変形の拘束により γ は支点付近で低下する傾向が見られ，本手法はこの傾向をよく再現できている。

参考文献

- 1) Cowper, G.R.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *J. Appl. Mech.*, ASCE, Vol.33, pp.335-340, 1966.
- 2) 齊木 功, 西井大樹, 岩熊哲夫: 任意断面梁のせん断遅れ解析の高精度化, 土木学会論文集A2, Vol.72, No.2, pp.I.53-I.62, 2016.
- 3) 齊木 功, 藤本竜太, 山本剛大: 非均質断面梁のせん断剛性評価に用いる断面の回転に関する一考察, 土木学会論文集A2 (印刷中) .