Phase-field 亀裂モデルを用いた Isogeometric 解析法の性能評価

○東北大学工学部建築・社会環境工学科 学生会員 韓 霽珂
東北大学大学院工学研究科 非会員 西 紳之介
東北大学大学院工学研究科 正会員 森口 周二
東北大学大学院工学研究科 正会員 寺田 賢二郎

1. はじめに

材料の亀裂発生・進展の精緻な予測は，大きな科学的関心であるとともに，工学全般において重要な課題である．特に，地震やその他の災害による土木構造物の亀裂発生・進展挙動を正確に把握しておくことは，社会基盤構造物の維持管理・補修を適切に行う上で有用である．本研究では，CAD ソフトウェアでの形状表現に用いられる B-spline 関数を近似関数の基底に利用した Isogeometric 解析法に Phase-Field (PF) 亀裂モデルを実装した亀裂進展シミュレーション手法について，適切な材料パラメータの設定方法を提案し，亀裂の幾何形状の正則化に用いられる代表長さと従来の破壊力学パラメータとの関係を調査する．

2. Isogeometric 解析

Isogeometric 解析（IGA）法とは，CAD ソフトウェアでの形状表現に用いられる B-spline 関数を近似関数の基底に用いた有限要素法の一種である．B-spline 基底関数の関数形は，次式のように Cox-de Boor 漸化式で定義される．

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1} + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1} \tag{1}$$

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで，ξ_i はノットと呼ばれるパラメータ空間内の点の座標（ノット値）であり，区分的に構成される B-spline モデルを繋ぐ役割を果たす．

3 次元固体形状モデルを表現するための NURBS 基底関数は，次式のような有理形式で定義される．

$$R^{ijk}{}_{pqr}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) w_{i,j,k}}{\sum_{s=1}^{n} \Sigma_{t=1}^{m} \Sigma_{u=1}^{l} N_{s,p}(\xi) M_{t,q}(\eta) L_{u,r}(\zeta) w_{s,t,u}} \tag{2}$$

ここで，$N_{i,p}(\xi), M_{j,q}(\eta), L_{k,r}(\zeta)$ はそれぞれパラメータ座標軸方向（ξ, η, ζ 方向）の B-spline 基底関数であり，$w_{i,j,k}$ はそれらの重みである．i, j, k は制御点番号，p, q, r は B-spline 関数の次数である．有理形式の基底関数を用いることで，B-spline 基底関数では表現が難しいとされる円錐曲線等の正確な描写が可能となり，重みを制御することで幾何形状の繊細な調整も可能となる．

3. Phase-field（PF）亀裂モデル

Griffith 理論より，物体の蓄積エネルギーは単位体積弾性ひずみエネルギー W と単位表面積破壊エネルギー g_C の総和である．Bourdin ら [1] の提案した l を亀裂表面を正則化するためのスカラー値パラメータとする PF 近似解法について，W を引張側 W^+ と圧縮側 W^- に分けた汎関数を示す．

$$\tilde{\Psi}_{pot}(\boldsymbol{F}, d, \Delta d) = \int_{\Omega} \{g(d) W^+(\boldsymbol{F}) + W^-(\boldsymbol{F})\} \, d\Omega + \int_{\Omega} g_C \gamma(d, \Delta d) \Omega \tag{3}$$

ここで，$d \in [0, 1]$ は損傷を示す PF パラメータであり，$g(d)$ は弾性剛性を低下させる単調減少関数であり，引張力が作用した場合のみ剛性が低下する．$\gamma(d, \Delta d)$ は亀裂密度関数である．

PF 法では，不連続な亀裂面から放出される全破壊エネルギーを亀裂密度関数を用いた連続的な損傷領域で記述する．その際に損傷面（2 次元）を損傷領域（3 次元）を近似するが，それに伴い破壊エネルギー g_C も 3 次元領域に対応する量に修正されるべきである．したがって，本研究では従来の破壊エネルギーを正則化パラメータ l で除した新たな破壊力学パラメータを導入し、次式のように 3 次元領域に拡張した破壊エネルギーを定義する．

$$\int_{\Gamma} g_C d\Gamma \approx \int_{\Omega} g_C \gamma(d, \Delta d) d\Omega = \frac{g_C}{l} l\Gamma = g_C^* \Omega^* \tag{4}$$

ここで，g_C^* を PF 亀裂モデルにおける単位体積当たりの拡張破壊エネルギー，Ω^* を PF 近似を行った破壊部位体積と定義した．これにより PF 法に適用する際には g_C ではなく g_C^* の値を実験的に定めればよいことがわかる．

本研究では，静的微小変形問題に対して Ambati ら [2] が考案したハイブリット定式化を有限変形問題に拡張した関数形を採用する．式 (3) について Euler-Lagrange の方程式を導出すると，物体の運動を表記する次の強形式が得られる．

$$W_0(\boldsymbol{F}) = W(\boldsymbol{F})^+ + W(\boldsymbol{F})^- \tag{5}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{F}, d) = (1-d)^2 \dfrac{\bar{\rho}}{J} \dfrac{\partial W_0(\boldsymbol{F})}{\partial \boldsymbol{F}} \boldsymbol{F}^T \\ -l^2 \Delta d + d = \dfrac{2}{g_C^*}(1-d) H^+ \\ \forall \boldsymbol{u} : W^+ < W^- \rightarrow d \equiv 0 \end{cases} \tag{6}$$

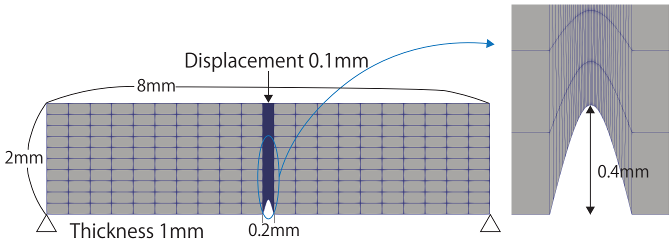
Key Words: Isogeometric Analysis, 亀裂進展,Crack phase-field
〒980-8572 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1 災害科学国際研究所 4F S403-S404, TEL 022-752-2132, FAX 022-752-2133

ここで，H^+ は次の Kuhn-Tucker 条件を満足する履歴変数である．

$$W^+ - H^+ \le 0, \qquad \dot{H}^+ \ge 0, \qquad \dot{H}^+(W^+ - H^+) = 0 \tag{7}$$

4.　検証条件

図 1 に示す 3 点曲げのモデルを用いて検証を行った．3 パッチで作成し，鉛直方向はすべて 10 要素とし，水平方向については中央部の亀裂発生パッチは 41 要素，それ以外は 10 要素で作成した．g_C^* を固定したまま，g_C 及び l を変化させた 6 ケースについて，2 次の NURBS 基底関数を用いて，0.04mm までは 40 ステップ，0.04mm から 0.06mm までは 1000 ステップで強制変位を与えた．



図–1　3 点曲げモデル

表–1　3 点曲げモデルの材料パラメータ

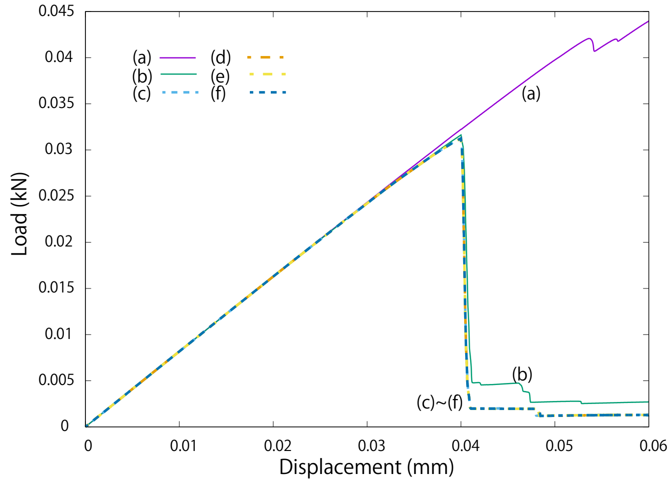
	E	ν	g_C^*	g_C	l
case	GPa		N/mm^2	N/mm	mm
(a)	20.8	0.3	25	0.5	0.02
(b)	20.8	0.3	25	0.05	0.002
(c)	20.8	0.3	25	0.005	0.0002
(d)	20.8	0.3	25	0.0005	0.00002
(e)	20.8	0.3	25	0.00005	0.000002
(f)	20.8	0.3	25	0.5E-12	0.02E-12

5.　検証結果

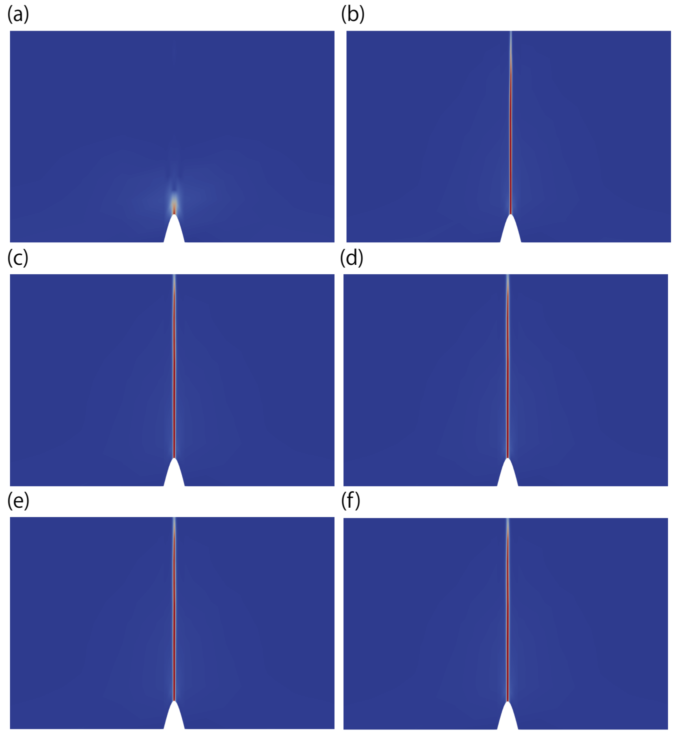
荷重-変位関係を図 2 に，モデル内部の損傷分布を図 3 に示す．図 3 より，(a) を除いて亀裂進展が見られる．(c) 以降の亀裂に表現の差は小さく，図 2 からも破壊エネルギー g_C と正則化パラメータ l の値を小さくしていくに伴い，荷重-変位曲線が収束していることがわかる．以上のことから，g_C^* を固定したまま g_C 及び l を小さくすることで解析結果が収束するといえる．また，(a) が不適切な結果となったのは，l で正則化される領域が構造全体に対して大きすぎることが原因として考えられる．そして，(c) から (f) の結果がおおよそ同じであることから，ある程度 l が小さければ収束解が得られると結論付けることができる．

6.　結論

PF 法で亀裂密度関数を用いて損傷領域を記述する場合，従来の破壊エネルギー g_C を用いるのではなく，g_C と l の比で定義した g_C^* を実験結果に照らしたキャリブレーションにより破壊力学パラメータとして決定すればよいことを示した．また，正しい亀裂挙動の解析を行うためには g_C^* を固定



図–2　3 点曲げモデルの荷重-変位関係



図–3　3 点曲げモデルの損傷分布

したまま，g_C 及び l を同じ比率である程度小さくすればよいという結論を得た．

参考文献

1) Blaise Bourdin, Gilles A. Francfort, J.-J. M.:　*The Variational Approach to Fracture*, Springer Netherlands, 2008.

2) Ambati, M., Gerasimov, T. and De Lorenzis, L.:　A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation, *Computational Mechanics*, Vol. 55, No. 2, pp. 383–405, Feb 2015.