

数値解析結果の空間モード分解による遡上津波のリスク評価

○東北大学工学部建築・社会環境工学科	学生会員	外里 健太
東北大学大学院工学研究科	学生会員	小谷 拓磨
東北大学災害科学国際研究所	正会員	森口 周二
東北大学災害科学国際研究所	正会員	寺田 賢二郎
新潟大学自然科学系建設学科	正会員	大竹 雄

1. 目的

津波などの自然災害の中には、多くの不確実性が含まれており、それらのリスクを適切に確率分布として評価するためにはモンテカルロシミュレーション等を行う必要がある。ただし、十分な試行回数が必要となるため、高い計算コストを要する数値解析と融合させるには工夫が求められる。本研究では、モード分解の理論を利用して数値解析結果からリスク指標となる量の応答曲面を効率的に作成し、低い計算コストでその確率分布が得られる仕組みを構築することを目的とする。

2. 特異値分解

行列を分解する1つの方法として、特異値分解がある。

まずデータ行列を定義する。 i 番目のケースのデータを n 次元ベクトル $\mathbf{x}_i$ として表現する。このデータが N ケースあるとき、以下のような行列を定義する。

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} - & \mathbf{x}_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{x}_N^T & - \end{pmatrix} \quad (1)$$

行列 $\mathbf{X}$ の特異値分解は以下のように表される。

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^T \quad (2)$$

ここで $\mathbf{U}$ は共分散行列 $\mathbf{C} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$ の固有ベクトル $\mathbf{u}_i$ を列ベクトルとする行列であり、この $\mathbf{u}_i$ がデータの特徴を表現している。また $\mathbf{V}$ は $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ の固有ベクトル $\mathbf{v}_i$ を列ベクトルとする行列であり、 $\mathbf{\Sigma}$ は対角項に特異値 σ_i が並ぶ行列である。これらは共分散行列の固有値の平方の値と一致する。

式(2)を展開すると以下の式ようになる。

$$\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_N \\ | & & | \end{pmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j(\sigma_j\mathbf{v}_j^T) \quad (3)$$

この式から、各データが共分散行列の固有ベクトル(モード)の線形結合として表現できることがわかる。1つのケースについて抜き出して表すと、以下のような式になる。

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^n (\sigma_j\mathbf{v}_{ij})\mathbf{u}_j \quad (4)$$

ここで $\mathbf{V}$ の i 行 j 列成分を $\mathbf{v}_{ij}$ とした。この式から、各ケースのデータは $\sigma_j\mathbf{v}_{ij}$ を成分とするモードの線形結合として表すことができる。

また、情報量が少ない、すなわち特異値(共分散行列の固有値)が小さいモードについては省略できるので、次式のように $r < n$ 個のモードを用いてデータを縮約することができる。

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1}^r (\sigma_j\mathbf{v}_{ij})\mathbf{u}_j \quad (5)$$

3. 解析データへの適用

津波の数値解析データへ先述の理論を適用する。簡易的な都市のモデルでの数値解析結果を対象とし、13棟の建物に作用する最大衝撃力データの解析を行う。解析ケースについては、津波の入射高 h と入射角度 θ をパラメータとして、これらを3通りずつ変えた合計9ケースの結果を用いる。また、データ行列は、行方向にケース、列方向に建物が並ぶような行列として定義され、これに対して特異値分解を行うことでモード分解をする。

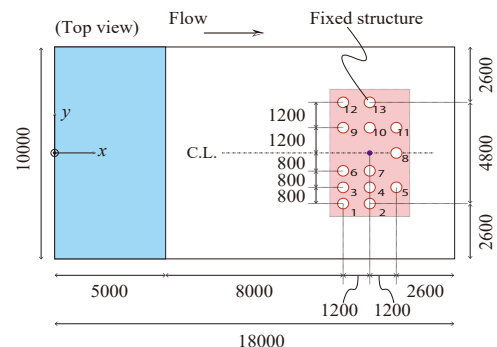


図-1 解析条件

特異値分解により求められたモードのうち第1および第2モードの成分を図-2に示す。この図から、第1モードについてはすべての建物で正の値をとり、前側の方が大きい値を示すため、津波高さが大きくなるほど衝撃力が大きくなる性質を示すことがわかる。また、第2モードについては、中央部に位置する建物が他の建物と比べ反対の傾向を示すことから、入射角度の影響を表現していることがわかる。

次元を削減してデータを表現する場合、一般的に寄与率

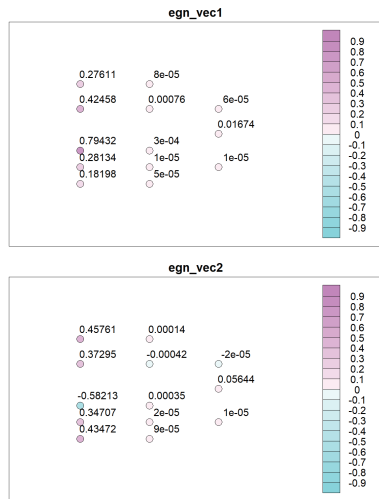


図-2 第1, 第2モード

(特異値の大きさ)を考慮する。今回のケースで寄与率を確認すると第2モードまででデータ特性の大部分を説明できるという結果になる。しかし、2つのモードで表した場合、一部のケース誤差が大きくなるため、今回は各ケースの誤差率を基準として用いるモードの数を決定した。ケース i の誤差率 e_i についてはデータの値 x_{ij} とモードから求められる値 $\hat{x}_{ij}$ を用いて以下の式のように定義した。 x_{ij} はケース i 建物 j の最大衝撃力の値を表す。

$$e_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{|x_{ij} - \hat{x}_{ij}|}{x_{ij}} \quad (6)$$

図-3に2つから6つのモードを用いた場合の各ケースの誤差率を示す。第6モードまで入れることで全体の誤差がケースによらずある程度小さくなっていることがわかるため、今回は6つのモードを用いることとした。

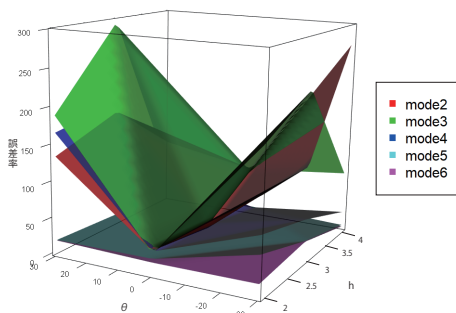


図-3 誤差率

4. 応答曲面の作成

解析データから得られたモードを用いて任意のケースでの衝撃力分布を計算することを考える。具体的には、式(4)の各モードの係数部分をパラメータの関数として次式のよ

うに表現し、最大衝撃力の応答曲面を作成する。

$$x(h, \theta) = \sum_{j=1}^r \alpha_j(h, \theta) u_j \quad (7)$$

各モードに対応する係数の関数 $\alpha_j(h, \theta)$ は線形補間により決定することとした。補間する係数については $\sigma_j v_{ij}$ より求められる。例として第1, 2モードに対応する係数の関数形を図-4に示す。

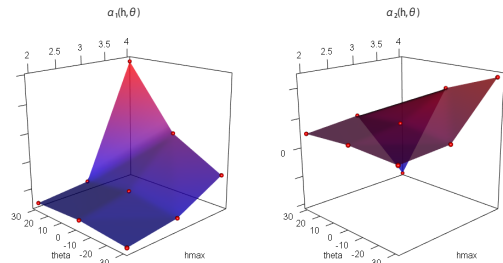


図-4 第1, 2モードの対応する係数の関数

このように各モードに対応する係数をパラメータ h, θ の関数として表現できるため、式(7)から任意のケースに対して建物の衝撃力分布を計算することができ、各建物に作用する最大衝撃力の応答曲面を作ることができる。すなわち、式(7)を用いることで、簡易的な計算で13棟の建物の衝撃力分布を求めることができる。これを用いてモンテカルロシミュレーションを行うことで各建物の最大衝撃力の確率分布を求めることが可能となる。さらに閾値を設定することで、各建物の超過確率を算出するなどの分析が可能になる。

5. 結論

複数ケースの数値解析結果を利用して任意のリスク指標の応答曲面を作成し、リスク評価を行う手法について説明した。今回は簡易的なモデルを用いたため13棟と少ない建物数であったが、棟数が増えても空間分布を求めることが可能である。今後はより実際の都市に近いモデルでの計算結果に対して適用を行い、その有用性を検証していく予定である。

参考文献

- 1) 小谷 拓磨, 高瀬 慎介, 森口 周二, 寺田 賢二郎, 福谷 陽, 大竹 雄, 野島 和也, 桜庭 雅明: 応答曲面を用いた数値解析援用確率論的津波ハザード評価, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol 72, No. 1, pp 58-69, 2016.
- 2) 平 邦彦; 固有直交分解による流体解析:1. 基礎, ながれ (日本流体力学会誌), Vol 30, No. 2, pp 115-123, 2011.
- 3) 本城 勇介, 大竹 雄: 信頼性設計法と性能設計の理念の実際 - 地盤構造物を中心として -, 技報堂出版, 2018.