多緩和時間係数モデルを用いた格子ボルツマン法によるキャビティ流れの3次元解析

東北大学大学院　学生会員　○佐藤　兼太
東北大学災害科学国際研究所　正 会 員　越村　俊一

1. はじめに

格子ボルツマン法(以下，LBM)において一般的な衝突則とされる格子BGKモデルは，簡便な計算アルゴリズムであるが，計算精度や数値安定性に関して問題があることが知られている．この問題に対して，多緩和時間係数モデル(以下，MRTモデル)が格子BGKモデルの問題を解決する衝突則として注目されている．よって，高精度かつ高効率な津波シミュレーションを実行するためには，MRTモデルによる衝突計算が有用であると考えられる．その一方で，MRTモデルは粘性に無関係な諸量により衝突計算のパラメータ設定を行う必要があるなど，そのパラメータ設定が困難であるといった問題が残されている．

本研究では上記の問題に対して，MRTモデルを用いて3次元キャビティ流れの数値実験を実施する．その上で，MRTモデルにおける緩和係数について数値的な検討を行い，津波数値解析手法としてのLBMについて検討する．

2. 格子ボルツマン法

(1) 格子ボルツマン法の概要

LBMは気体分子運動論をアナロジーとする新しい数値流体モデルである．連続体である流体を規則的な格子上を移動する仮想的な粒子の集合体と近似し，その仮想粒子の並進と衝突の時間発展から巨視的な流れ場の諸量を求めるメソスケールの解析手法と位置づけられている．LBMの特長として，圧力のPoisson方程式の計算が不要であるため，高効率な演算が可能であることや，並列計算に向く，といったことが挙げられる．以下では，MRTモデルに基づくLBMについて，その要点のみを述べる．

(2) 格子形状

本研究では3次元計算を実施するため，格子形状として図-1に示す3次元19方向型格子を用いる．仮想粒子の運動は図-1の1から19のリンク方向に制限される．

(3) 格子ボルツマン方程式

LBMは図-1のリンク方向上に粒子分布関数f_iを配置し，その時間発展を逐次計算することで，流体の計算を行う．

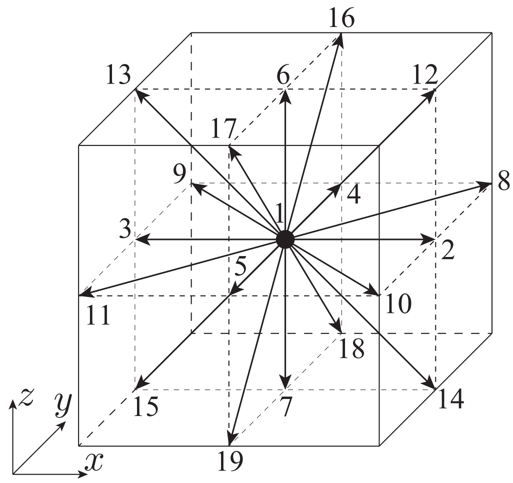

図-1　3次元19方向型格子形状

粒子分布関数の支配方程式は，式(1)に示す格子ボルツマン方程式である．

$$f_i\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_i\Delta t, t+\Delta t\right)=f_i\left(\boldsymbol{x},t\right)+\Omega_i\left[f_i\left(\boldsymbol{x},t\right)\right] \tag{1}$$

ここで，$\Omega_i\left[f_i\left(\boldsymbol{x},t\right)\right]$は，仮想粒子の衝突項であり，本研究では式(2)に示すMRTモデルを採用する．

$$\Omega_l\left[f_i\left(\boldsymbol{x},t\right)\right]=\mathrm{M}^{-1}\mathrm{S}_l\left[(\mathrm{M}\boldsymbol{f})-\boldsymbol{m}^{eq}\right] \tag{2}$$

MRTモデルの計算手順は，以下の手順で行われる．

1. 粒子分布関数f_iを変換行列Mを用いて，それぞれ独立したモーメント空間に線形変換
2. モーメント空間において分布関数が，それぞれの局所平衡量$\boldsymbol{m}^{eq}$に，緩和時間S_lで緩和(衝突計算)
3. 逆変換行列M^{-1}により，モーメント空間$\boldsymbol{m}$から速度空間$\boldsymbol{f}$にフィードバック

(4) 巨視的な物理量との関係

LBMでは，式(1)によって時間発展した粒子分布関数f_iから，マクロスケールの物理量を計算する．それらは，流体の密度ρと流速$\boldsymbol{u}$として与えられ，それぞれ粒子分布関数f_iの0次，1次モーメントから計算することができる．よって，LBMはマクロスケールの諸量が直接時間発展する手法ではないことがわかる．

キーワード: 格子ボルツマン法，多緩和時間係数モデル，数値流体力学，3次元シミュレーション，キャビティ流れ
連絡先: 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1 E302，TEL: 022-752-2082，FAX: 022-752-2083

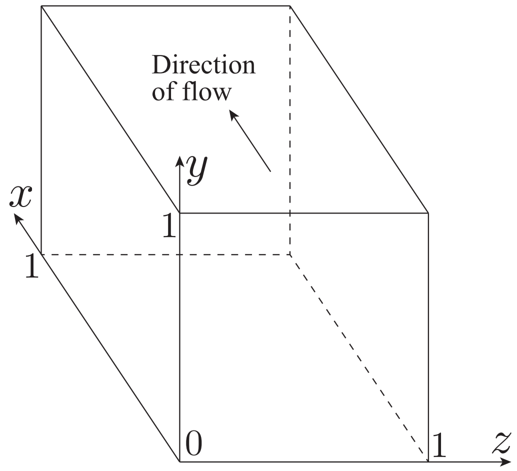

図-2　Ku *et al.*(1987)による3次元キャビティ流れの計算体系

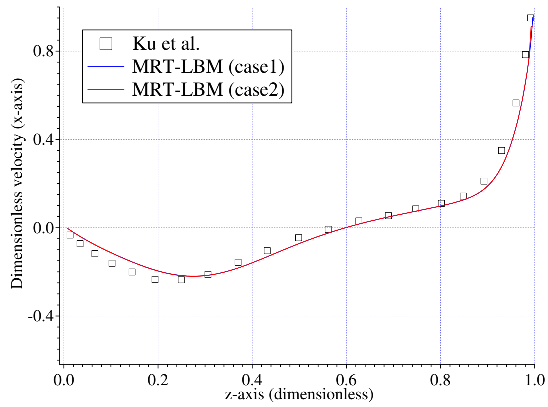

図-3　x軸方向に対する流速の空間分布

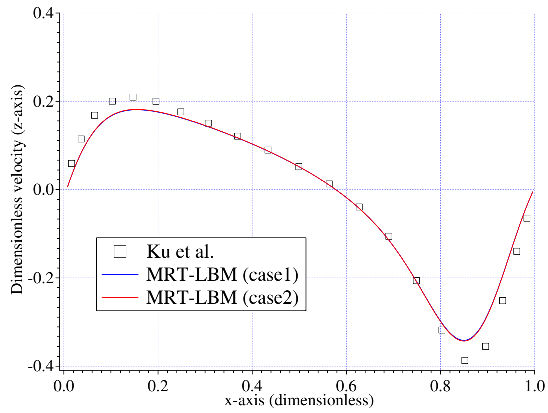

図-4　z軸方向に対する流速の空間分布

3. 3次元キャビティ流れの数値解析

(1) 計算体系の設定

以上で述べた手法の検証として，Ku *et al.*(1987)が実施した3次元キャビティ流れの数値実験を実施した．本解析で設定した計算体系を図-2に示す．本解析では，図-2の$y=1$において一定流速$u_{\max}=0.1$を与えてキャビティ流れを再現した．なお本解析では，系の代表長さを$L=1$，代表流速を$u_{\max}=0.1$とし，流れ場のレイノルズ数Reを以下のように定義し，動粘性係数νを設定した．

$$Re=\frac{u_{\max}L}{\nu} \tag{3}$$

本解析ではレイノルズ数を$Re=400$と設定した．

(2) 緩和時間係数S_1の設定

本解析では非熱流体を仮定し，衝突の際に保存するモーメント空間の緩和時間係数を全て0と設定した．また，動粘性に関与する緩和時間係数についてはTölke *et al.*(1987)の定式化に倣い設定した．MRTモデルで問題となるのは，上記以外の緩和時間係数の設定方法である．これらの係数は任意のパラメータとされるが，その設定方法は以下に示す2通りの方法がある．

1. 流れ場に応じて設定する(d'Humières *et al.*,2002)
2. 全て，-1と設定する(Tölke *et al.*,2006)

本研究では，上記の設定方法をそれぞれcase1，case2とし，比較検証を行った．

(3) 数値解析結果

キャビティ流れが定常状態に収束した際の流速分布を図-3および図-4に示す．これらの図より，本解析ではcase1とcase2の計算結果はほぼ一致していると言える．よって，case2の比較的簡便なパラメータ設定方法でも，実用上十分にMRTモデルの計算を実行可能なパラメータの設定方法であることが明らかとなった．

4. おわりに

本研究では，LBMによる津波数値解析の高度化に向け，MRTモデルにおける緩和時間係数について検討を行った．検証の結果，キャビティ流れの場合はcase2のパラメータ設定方法でも十分な計算精度を有していることが明らかとなった．今後は，本研究と同様の検討を自由表面流れモデルにおいても実施する予定である．

参　考　文　献

d'Humières, D., Ginzburg, I., Krafczyk, M., Lallemand, P. and Luo, L. S., Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **360**, pp.437–451., 2002.

Ku, H. C., Hirsh, R. S. and Taylor, T. D., A Pseudospectral Method for Solution of the Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations, *J. Comput. Phys.*, **70**, pp.439–462., 1987.

Tölke, J., Freudiger, S. and Krafczyk, M., An adaptive scheme using hierarchical grids for lattice Boltzmann multi-phase flow simulations, *Comput. Fluids*, **35**, pp.820–830., 2006.