

マルチマテリアルトポロジー最適化の手法検証

○東北大学工学部 学生員 渡邊 大貴
 東北大学大学院工学研究科 正 員 加藤 準治
 東北大学大学院工学研究科 正 員 京谷 孝史

1. はじめに

近年、異種材料をうまく配置することで力学的な性能を最大にすることを目的にしたマルチマテリアルトポロジー最適設計に大きな関心が寄せられている。

マルチスケルトポロジー最適化では、SIMP 法¹⁾と呼ばれる単純な緩和材料モデルをマルチマテリアル用に拡張した SIMP 法が用いられるが、3 相材料以上になると材料が明確に 2 値化しずらくなるという問題がある。近年、Watts ら²⁾によって 3 相材料以上で 2 値化が可能な方法が提案された。しかし、その性能評価は十分に行われていない。

そこで、本研究ではまず Watts らの手法を再現し、その信頼性と性能評価を行うとともに 3 相材料の拡張 SIMP 法との比較を行う。

2. マルチマテリアル拡張 SIMP 法

3 つの異なる材料からなる 3 相材料拡張 SIMP 法の場合は

$$\begin{aligned} E &= s_1^p E_{12} + (1 - s_1^p) E_3 \\ &= s_1^p ((1 - s_2^p) E_1 + s_2^p E_2) + (1 - s_1^p) E_3 \end{aligned} \quad (1)$$

と表される。ただし、 $(0 \leq s_1, s_2 \leq 1)$

E_1 および E_2, E_3 はそれぞれ材料 1 および 2, 3 のヤング率を意味する。また、 E_{12} は、材料 1 と 2 で構成された複合材料を意味する。式 (1) より、3 相材料の場合は 2 種類の設計変数を必要とする。なお、 s_1 は、全材料に対する材料 1 と 2 で構成された 2 相材料の体積比率、 s_2 は材料 1 と 2 を足した総対積に対する材料 2 の体積比率を示している。感度解析で便宜上、 E を s_1, s_2 で微分した値が正で得られるようにしたいため、 E_1, E_2, E_3 を $E_2 > E_1 > E_3$ とする。

3. Watts らの提案手法の概要

以下、密度フィルタリングを受けた設計変数 s_1, s_2 をそれぞれ $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2$ と記す。式 (1) 同様にして、設計領域内の任意の最小単位体積 x において、材料 1, 2, 3 の密度はそれぞれ

$$\tilde{v}_1(\mathbf{x}, \tilde{s}_1, \tilde{s}_2) = \tilde{s}_1^p (1 - \tilde{s}_2^p) \quad (2)$$

$$\tilde{v}_2(\mathbf{x}, \tilde{s}_1, \tilde{s}_2) = \tilde{s}_1^p \tilde{s}_2^p \quad (3)$$

$$\tilde{v}_3(\mathbf{x}, \tilde{s}_1, \tilde{s}_2) = 1 - \tilde{s}_1^p \quad (4)$$

ただし、 $(0 \leq \tilde{s}_1, \tilde{s}_2 \leq 1)$ が成り立つ必要がある。これらの式で得られた $\tilde{v}$ に対して、最も密度が高いある単一の材料

へ追いやるような操作を行う。そのために、閾値関数を用いた変換 $\hat{v}(\tilde{v})$ 行う。これは、ハイパボリックタンジェント関数を修正したものであり、

$$\hat{v}(\tilde{v}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\exp(2\epsilon(\tilde{v} - T)) - 1}{\exp(2\epsilon(\tilde{v} - T)) + 1} + 1 \right) \quad (5)$$

と表せる。ここで、 $T \in (0, 1)$ は 2 値化の基準となる密度を示すパラメータであり、 ϵ はハイパボリックタンジェント関数をヘヴィサイド関数にどれだけ近づけるかを示すパラメータである。 T の適切な値域は $1/2 \leq T \leq 1/3$ とされている。本研究では各材料を平等に評価したいため、 $T = 1/2$ を用いた。式 (5) の変換によって $\tilde{v}_1$ を $\hat{v}_1(\tilde{v}_1)$ へ 2 値化した場合、3 相材料の密度の前提条件が成り立たない。すなわち、 $\hat{v}_1 + \hat{v}_2 + \hat{v}_3 \neq 1$ となってしまう。この矛盾を避けるため、さらに $\tilde{v}_2, \tilde{v}_3$ を、

$$\hat{v}_1 + \hat{v}_2 + \hat{v}_3 = 1 \quad (6)$$

$$\frac{\hat{v}_2}{\hat{v}_3} = \frac{\tilde{v}_2}{\tilde{v}_3} \quad (7)$$

を満たすような $\hat{v}_2, \hat{v}_3$ へと変換する。こうして、設計領域すべての単位体積において 2 値化の操作を行って得られた密度を $\hat{\mathbf{v}}^{(1)} = (\hat{v}_1^{(1)}, \hat{v}_2^{(1)}, \hat{v}_3^{(1)})$ とすると、材料 2, 3 をそれぞれ式 (5) へ代入した場合についても同様に考えて $\hat{\mathbf{v}}^{(2)}, \hat{\mathbf{v}}^{(3)}$ が得られる。最後に、操作的偏りをなくするため平均をとって

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{3} (\hat{\mathbf{v}}^{(1)} + \hat{\mathbf{v}}^{(2)} + \hat{\mathbf{v}}^{(3)}) \quad (8)$$

とすることで、最終的な $\hat{\mathbf{v}}$ を得る。上記の操作は、 $n+1$ 相 (n は $n \geq 2$ の自然数) の材料でも定式化することができる。式 (5)~(8) の操作を一つの式にまとめると、

$$\hat{v}_i = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \left(\left(\sum_{k=1}^{n+1} c(\tilde{v}_k) \right) \tilde{v}_i + (1 - c(\tilde{v}_i)) \right) & \text{for } i = 1, \dots, n \\ 1 - \sum_{i=1}^n \hat{v}_i & \text{for } i = n+1 \end{cases} \quad (9)$$

ここで、 $c(\tilde{v})$ は以下である。

$$c(\tilde{v}) = \frac{1 - \hat{v}(\tilde{v})}{1 - \tilde{v}} \quad (10)$$

4. 最適化問題の設定

本研究ではひずみエネルギーを目的関数として、それを最大化することで剛性最大化を解く。以下のように最適化問題を設定した。

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && f(s) = - \int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma d\Omega \\
 &\text{subject to} && h_1(\hat{v}(\tilde{v}(\tilde{s}(s)))) = \frac{1}{n_{\text{elm}}} \int_{\Omega} \hat{v}_1(s) d\Omega \leq v_1^{\text{UB}} \\
 &&& h_2(\hat{v}(\tilde{v}(\tilde{s}(s)))) = \frac{1}{n_{\text{elm}}} \int_{\Omega} \hat{v}_2(s) d\Omega \leq v_2^{\text{UB}} \\
 &&& h_3(\hat{v}(\tilde{v}(\tilde{s}(s)))) = \frac{1}{n_{\text{elm}}} \int_{\Omega} \sum_i^3 \hat{v}_i^q(s) (1 - \hat{v}_i(s))^q d\Omega \leq m^{\text{UB}}
 \end{aligned} \tag{11}$$

$h_3(\hat{v}(\tilde{v}(\tilde{s}(s))))$ の関数では、密度の混ざり具合について制約をかけている。

5. 感度解析手法およびその精度検証

本研究では勾配基本法による最適化アルゴリズムを用いるため、 $\partial f / \partial s_i$, $\partial h / \partial s_i$ を求める必要がある。まずは、本手法によって得られた感度を以下の有限差分法の式に従って得られた感度と比較し、その精度を検証する。

$$\nabla_s f = \frac{f(s + \Delta s) - f(s)}{\Delta s_i} \tag{12}$$

式(12)は計算量が膨大になるため実用には向かないが、その単純な原理から感度の正しさは保証され、ここではベンチマークとして用いられる。本検証例で用いる解析条件を図-2に、材料定数を表-1に示す。それぞれの感度解析法によって得られた要素毎の初期感度を図-1に示す。図-1より、それぞれの感度が描く曲線はほぼ一致しており、本手法による感度解析は高い精度を有するといえる。

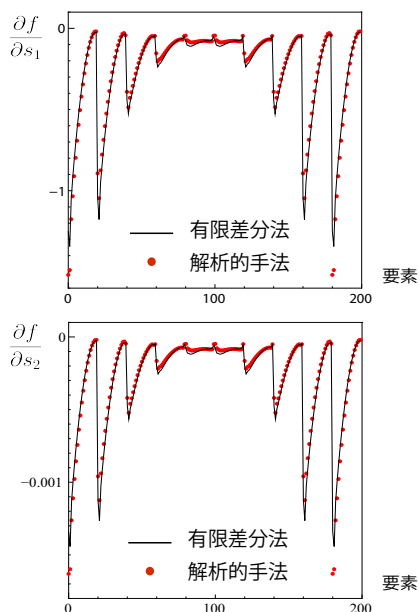


図-1 感度解析の精度検証

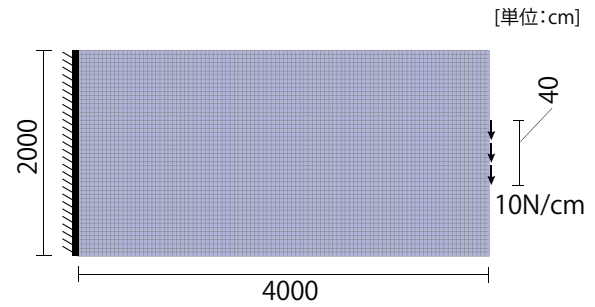


図-2 構造解析モデル

表-1 数値計算例に用いた使用材料

	材料 1(青)	材料 2(緑)	空気
ヤング率 (GPa)	220	230	0.001
ポアソン比	0.3	0.3	0
体積制約 (%)	25	25	50

6. 最適化数値計算例

本手法を用いた最適化数値計算例を紹介する。ただし、解析条件は図-2のとおりで、要素数は $100 \times 50 = 5000$ である。

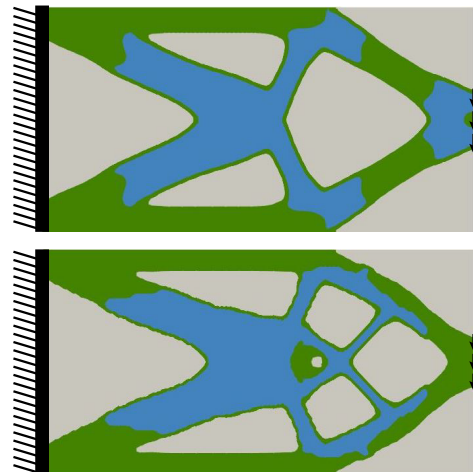


図-3 最適化結果 上) 3 相材料拡張 SIMP 法の結果 下) Watts らの手法の結果

7. まとめ

- Watts らの手法を用いた場合、より 2 値化された最適化結果が得られ、多少ではあるが剛性も上がった。また、収束までのステップ回数も少なかった。
- Watts らの手法は空気以外の各材料のヤング率 E_1 , E_2 の数値を入れ替えても計算可能なため汎用性に優れ、マルチフィジクスなどの諸問題のマルチマテリアルトポロジー最適化などへの応用が期待できる。

参考文献

- Zhou, M., Rozvany, G.I.N.: The COC algorithm, part II : Topological, geometrical and generalized shape optimization, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 89, pp. 309-336, 1991.
- S. Watts, D.A. Tortorelli : An n -material thresholding method for improving integerness of solutions in topology optimization, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 108(2016)1498-1524.