インフィル構造の応力制約付きトポロジー最適化

○東北大学工学部 学生員 ○鎌田 浩基
東北大学大学院工学研究科 正 員 加藤 準治
東北大学大学院工学研究科 正 員 京谷 孝史

1. はじめに

近年，積層造形技術の発展に伴い，多孔質充填構造であるインフィル構造がさまざまな分野で注目されている．インフィル構造は高い座屈性能やロバスト性を付加的に有しているが，その最適設計は容易ではない．近年，Wu ら [1] によってインフィル構造のトポロジー最適化法が提案されたが応力制約などの実用に向けた取り組みはまだない．本研究では応力制約を最適化問題に課すことによって応力集中を避け，実設計を念頭に置いたインフィル構造のトポロジー最適化を行った．

2. 設計変数および最適化問題の設定

本研究ではひずみエネルギーを最小化する最適化問題を設定する．そこで，要素ごとの材料体積比を設計変数 $s_e\,(e = 1, 2, \cdots, N)$，後述のフィルターをかけた後の設計変数を $\rho_e\,(e = 1, 2, \cdots, N)$ とし，目的関数 $f(\boldsymbol{s})$ および 3 つの不等式制約条件 $g_{\mathrm{total}}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{s})), g_{\mathrm{local}}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{s})), g_{\mathrm{stress}}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{s}))$ を以下のように設定した．

$$\text{minimize} \quad f(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{s})) = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathrm{d}\Omega \tag{1}$$
$$\text{subject to} \quad g_{\mathrm{total}}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{s})) = \int_\Omega s_e\, \mathrm{d}\Omega \leq \hat{V} \tag{2}$$
$$g_{\mathrm{local}}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{s})) = \bar{\rho}_e \leq \alpha \quad, \forall e \tag{3}$$
$$g_{\mathrm{stress}}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{s})) = \sigma_e^{\mathrm{vM}} \leq \bar{\sigma}\,, \forall e \tag{4}$$

ここで，N は有限要素の数，g_{total} は全体の体積制約式，g_{local} は局所的な体積制約式，g_{stress} は応力制約式，$\boldsymbol{\sigma}$ はコーシー応力, $\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみ，$\hat{V}$ は材料 2 の占める体積，$\bar{\rho}_e$ は局所領域内での平均密度，α は局所的な体積制約の上限値パラメータ，$\boldsymbol{\sigma}_e^{\mathrm{vM}}$ は各要素での代表的なミーゼス応力，$\bar{\sigma}$ は応力制約の上限値パラメータを表す．

3. 密度フィルター

以下に示した密度フィルターにより設計変数 $\boldsymbol{s}$ を $\tilde{\boldsymbol{s}}$ へと変換する．

$$\tilde{s}_e(\boldsymbol{s}) = \frac{\sum_{j \in \mathbb{M}_e} w_j s_j}{\sum_{j \in \mathbb{M}_e} w_j} \tag{5}$$

ここで，$\mathbb{M}_e$ は要素の中心点に関するフィルター半径 r_{fil} 内に含まれる要素の集合である．また重付け係数 ω_j は線形の距離関数である．

4. 閾値関数

次に閾値関数により，変数 $\tilde{\boldsymbol{s}}$ を $\boldsymbol{\rho}$ へと変換する．閾値関数は，ある閾値に関して引数を 2 値化するための関数のことであり，以下の関数を用いる．

$$\rho_e(\tilde{s}_e) = \frac{\tanh\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tanh\left(\beta\left(\tilde{s}_e - \frac{1}{2}\right)\right)}{2\tanh\left(\frac{\beta}{2}\right)} \tag{6}$$

5. 剛性と応力の緩和

グレースケールの少ない最適化結果を得るにあたって，内挿された設計変数を扱いやすくするためにペナルティ関数を導入する．本研究では Holmberg[2] らにならって SIMP 法を剛性と応力に対して別々のペナルティパラメータで課す．剛性と応力のペナルティ関数をそれぞれ $\eta_k(\rho_e(\boldsymbol{s}))$，$\eta_s(\rho_e(\boldsymbol{s}))$ とすると，要素剛性行列と応力は次のようにあらわされる．

$$\boldsymbol{K_e} = \eta_{\mathrm{k}}(\rho_e(\boldsymbol{s}))\hat{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{e}} = (\rho(\boldsymbol{s}_i))^3 \hat{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{e}} \tag{7}$$
$$\boldsymbol{\sigma}_e = \eta_{\mathrm{s}}(\rho_e(\boldsymbol{s}))\hat{\boldsymbol{\sigma}}_e = (\rho(\boldsymbol{s}_i))^{\frac{1}{2}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_e \tag{8}$$

ここで $\hat{\boldsymbol{K}}_e$ は要素剛性マトリックス，$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_e = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}_a\boldsymbol{u}(\boldsymbol{s})$，$\boldsymbol{B}_a$ は要素中心を応力評価点する B マトリックス，$\boldsymbol{C}$ は線形弾性マトリックスを表す．

6. 局所体積

局所体積 $\bar{\rho}_e$ とは，設計領域内の各要素の中心座標からある半径をとったときの，その半径領域 $\mathbb{N}_e$ 内での体積比率であり，以下の式で与えられる．

$$\bar{\rho}_e = \frac{\sum_{i \in \mathbb{N}_e} \rho_i}{\sum_{i \in \mathbb{N}_e} 1} \tag{9}$$

ここで局所体積 $\bar{\rho}_e$ を制約することを考えると，矩形設計領域の辺に面する要素では，領域 $\mathbb{N}_e$ が半円となってしまい，実質的な局所体積制約の上限値がおおよそ半分になってしまう．そのため, 本研究では以下のように影響半径 r_{infl} を与えることによりこの問題を改善した．

$$r_{\mathrm{infl}} = r_{\max} \times \sqrt{\frac{N_{\max}}{N_{\mathrm{infl}}}} \tag{10}$$

ここで $r_{\max}$ は与える影響半径，また N_{infl}，$N_{\max}$ は影響半径に含まれる要素数とその最大値である．

Key Words: トポロジー最適化，インフィル構造，積層造形
〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, TEL 022-795-7489

7. p-norm による制約条件式の集約

式 (3)，式 (4) ではそれぞれ設計変数の数だけ制約式が存在することを意味し，計算コストがかかるためこれらをすべて考慮するのは現実的でない．そこで，それぞれの最大値のみが上限値を超えないようにすることを考える．ここでは p-norm の考え方を用い，また p の値は計算上無限大とできないことを考慮すると，式 (3)，式 (4) をそれぞれ次のように 1 つの制約式に書き換えることが出来る．

$$
\begin{aligned}
g_{\mathrm{local}}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{s})) &= \max \bar{\rho}_e \le \alpha \quad , \forall e \\
&= \left(\frac{1}{n} \sum_e \bar{\rho}_e^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \alpha \qquad (11) \\
g_{\mathrm{stress}}(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{s})) &= \sigma_e^{\mathrm{vM}} \le \bar{\sigma} \, , \forall a \\
&= \sigma^{\mathrm{PN}} = \left(\sum_e (\sigma_e^{\mathrm{vM}})^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \bar{\sigma} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

ただし，局所的な体積制約では $p = 16$，応力制約では $p = 8$ をそれぞれ用いている．

8. 感度解析

勾配基本法による最適化アルゴリズムを用いるため目的関数と制約条件式の設計変数に対する勾配（感度）$\partial f/\partial s_e$，$\partial g_{\mathrm{total}}/\partial s_e$，$\partial g_{\mathrm{local}}/\partial s_e$，$\partial g_{\mathrm{stress}}/\partial s_e$ をそれぞれ求める必要がある．本研究では 2 値化された最適化結果を得るために設計変数の変換を 2 回行っているが，それにより各感度を求める際に設計変数での直接的な微分が出来なくなるため微分の連鎖律を用いて感度を導出している．それを除くと式 (1) の目的関数，式 (2) の全体の体積制約条件式の感度は通常の剛性最大化のトポロジー最適化の感度と同じであることから，ここでは省略する．本研究における特別な制約条件式である，式 (11) の局所的な体積制約条件式の感度は次のように求められる．

$$
\frac{\partial g_{\mathrm{local}}}{\partial s_e} = \sum_{i \in \mathbb{M}_e} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}_i} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{\rho}_j} \frac{\partial \bar{\rho}_j}{\partial \rho_i} \right) \frac{\partial \rho_i}{\partial \tilde{s}_i} \frac{\partial \tilde{s}_i}{\partial s_e} \right) \qquad (13)
$$

また，式 (12) の応力制約条件式の感度は，剛性最大化の目的関数の感度と同様に随伴変数法により，次のようにして求められる．

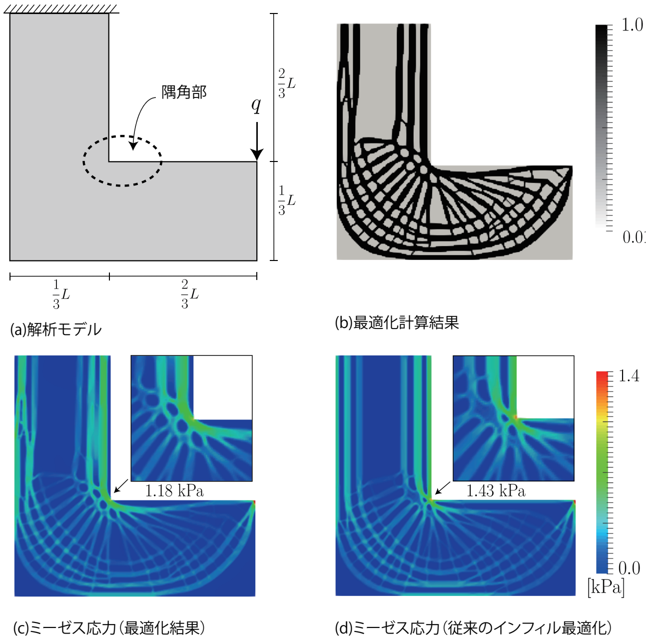
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g_{\mathrm{stress}}}{\partial s_e} = & \sum_{j \in \Omega} \left(\frac{\partial \sigma^{\mathrm{PN}}}{\partial \sigma_j^{\mathrm{vM}}} \left(\frac{\partial \sigma_j^{\mathrm{vM}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_j} \right)^{\mathrm{T}} \frac{\partial \eta_s(\rho_j)}{\partial \rho_j} \frac{\partial \rho_j}{\partial s_e} \boldsymbol{D}_j \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{u} \right) \\
& - \boldsymbol{\mu}^T \sum_{j \in \mathbb{M}_e} \left(\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \rho_j} \frac{\partial \rho_j}{\partial s_e} \boldsymbol{u} \right) \qquad (14)
\end{aligned}
$$

ただし，随伴変数ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ は次の随伴方程式を解くことによって求められる．

$$
\boldsymbol{K}\boldsymbol{\mu} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial \sigma^{\mathrm{PN}}}{\partial \sigma_j^{\mathrm{vM}}} \eta_s(\rho_j) \boldsymbol{B}_j^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_j \frac{\partial \sigma_j^{\mathrm{vM}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_j} \right) \qquad (15)
$$

表–1 使用材料

ヤング係数 (kPa)	ポアソン比	許容応力 (kPa)
100	0.3	1.75



図–1 解析モデルと最適化結果

9. 最適化計算例

ここでは，本手法を用いた最適化計算例について述べる．今回は**図–1**(a) において L = 10.0 cm，要素の大きさを 0.05 cm × 0.05 cm の計 25600 要素で，平面応力状態を仮定し，四角形 4 節点要素を用いて最適化計算を行った．また，使用材料は**表–1** に示したものを用い，応力制約の上限値を表中の許容応力値に設定した．荷重には q = 1.0 N の集中荷重を与えている．**図–1**(b) はその結果を示しており，応力集中を避けた L 字の隅角部に曲線部材を持ったトポロジーを得ることが出来た．また**図–1**(c)，(d) はそれぞれ本研究および，応力制約を課していない従来法の最適化結果でミーゼス応力を示している．(c) の構造は (d) の構造と比較して応力集中避ける材料配置となっていることが分かる．

10. 結論

本研究では文献 [1] によって提案されているインフィル構造の最適化に対し，応力集中を避けるために応力制約を課したトポロジー最適化を行った．また閾値関数を用いたトポロジー最適化が本研究の制約下でも有用であることが示された．本研究で得られた最適構造は複雑であるため，積層造形による製造を前提としており，さらに応力制約条件を課すことでより実用的な設計が可能となった．

参考文献

1) Jun Wu , Niels Aage , Rüdiger Westermann , Ole Sigmund : Infill Optimization for Additive Manufacturing -Approaching Bone-like Porous Structures, IEEE, 1077-2626, 2016.
2) Erik Hornberg , Bo Torstenfelt , Anders Klarbring : Stress constrained topology optimization, Struct Multidisc Optim48, 33-47, 2013.