

一般都市数の円周経済におけるブレイクポイントの解析的評価

東北大学

東北大学 フェロー会員

東北大学 正会員

東北大学 学生会員

○遠藤拓真

池田清宏

大澤 実

恩田幹久

1. はじめに

経済の国際化や交通・情報網の整備に伴い、地域・都市間の競争が激化している。これによる都市間の人口変動が懸念されており、このような現象への適切な都市振興政策を考えるために、労働力や資本の都市間移動と集積のメカニズムの理論的基盤が必要である。

都市の人口集積特性は、新経済地理学 (NEG) 分野で開発された Core-Periphery (CP) モデルを用いて、2都市や円周都市経済を中心として研究されている。円周都市経済の既存研究では、都市数が偶数の時には都市間の空間周期が倍化する「空間周期倍化」現象、都市数が奇数の時は擬似的な空間周期倍化現象が支配的であることがわかっているが、その分岐が発生する点（ブレイクポイント）の解は Ikeda *et al.*¹⁾ でも、都市数が偶数の時に限られている。本研究では都市数が奇数の時も含め、消費者の一樣分布状態から発生するブレイクポイントの公式を解析的に導く。また、都市数が無限大に近づく時に、都市数のいかによらず、ブレイクポイントが一定値に収束することを示す。

2. 都市の集積・分散モデル

n 個の都市が番号 $i = 0, 1, \dots, n-1$ の順に円周上に並んだ図1のような円周都市経済を考える。モデルとして Forslid and Ottavino²⁾ の (FO) モデル、均衡解への調整ダイナミクスとして replicator dynamics を仮定する。設定として、人口は効用に応じて都市を移動できる skilled worker と全都市に1単位存在し、移動ができない unskilled worker に分類する。skilled worker の数は、都市 i に λ_i 、全都市で $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = H$ だけ存在する。文献³⁾ に詳しく記されているが、財の都市間の輸送には費用が掛かると考え、これを $\phi_{ij} \equiv \exp(\tau t(i, j))$ で表す。ここで τ は輸送費用パラメータ、 $t(i, j)$ は2つの都市 i, j 間の最短距離である。

次に replicator dynamics は以下ようになる。

$$\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} = \mathbf{F}(\lambda, \tau) \equiv \text{diag}[\lambda](\mathbf{v}(\lambda, \tau) - \bar{v}(\lambda, \tau)\mathbf{1}),$$

$$\bar{v}(\lambda, \tau) \equiv H^{-1} \lambda^T \mathbf{v}(\lambda, \tau)$$

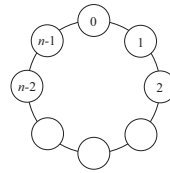


図-1 円周都市経済

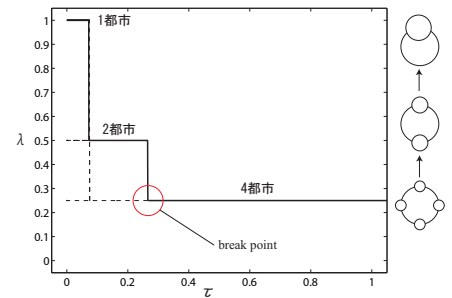


図-2 ブレイクポイント

各都市の人口と輸送費パラメータを未知変数とする非線形方程式で表されるため、これを解くことにより交通費用と人口シェアの関係を得ることができる。

3. 円周都市経済のブレイクポイント

図2は4都市の円周都市経済における輸送費と人口の関係を表している。一樣分布の状態から輸送費を低くしていくと、とある点で分岐が発生する。この点では、集積力により対称均衡の安定性が崩れ、4都市から2都市へ集積が発生する。この分岐点がブレイクポイントであり、ここではその解析式を導出する。

(1) 分岐の発生条件

分岐現象の有無は、調整ダイナミクスの Jacobi 行列 $J(\lambda) \equiv \partial \mathbf{F} / \partial \lambda$ の固有値 $\mathbf{g} = (g_0, g_1, \dots, g_{n-1})$ によって判定できる。 $\mathbf{g}$ のうちいずれかの値が0になる時に分岐が発生する。 $\mathbf{g}$ は空間割引行列 $\mathbf{D}$ の固有値である $\epsilon = (\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1})$ の簡単な関数として表現できるので、分岐現象を分析するには、この空間割引行列が必要不可欠となる。

(2) 空間割引行列 $\mathbf{D}$ とその性質

空間割引行列は、工業財のバラエティ間の代替の弾力性を $\sigma > 1$ として、

$$\mathbf{D} = [d_{ij}] \equiv \phi_{ij}^{1-\sigma} = \exp[(1-\sigma)\tau t(i, j)] \quad (1)$$

で与えられる。便宜上、 $r \equiv \exp((1-\sigma)\tau(2\pi/n))$ と定義する。 $r \in (0, 1]$ は隣接する地点間での輸送費の自由度を表現するので、 r が1に近いほど立地点間の財取引が自由であることを意味している。またこの定義より、 τ を輸送費用として変化させることは、 r を変化させることと等価である。

Key Words: 新経済地理学, 円周都市経済, 空間周期倍化, 離散フーリエ変換, 分岐, ブレイクポイント

〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, Phone: 022-795-7420, Fax: 022-795-7418, E-mail: takuma.endo.t8@dc.tohoku.ac.jp

空間割引行列は円周都市経済のもとでは巡回行列となる．この性質を利用すると，離散フーリエ変換によって，空間割引行列の固有値を解析的に求めることができる．また， n 個の都市における空間割引行列は n 個の固有値を持つ．第 k 固有値を $\epsilon_k(r)$ で表すと，(1) の議論により， $g_k = G(\epsilon_k(r))$ である．分岐発生点である ϵ^* は外生的に決まるパラメータで，工業財への支出割合を μ とすると，

$$\epsilon^* = \frac{\mu(2\sigma - 1)}{\mu^2 + \sigma(\sigma - 1)} \quad (2)$$

で $G(\epsilon^*) = 0$ を満たす．更に，方程式 $\min_k \epsilon_k(r) = \epsilon^*$ を r について解けば，ブレイクポイントが導かれることがいえる．

(3) 最初に起きる分岐

最初に起きる分岐の特徴として，都市数が偶数の場合には空間周期倍化分岐，都市数が奇数の場合には擬似的空間周期倍化分岐が支配的となることがわかっている（ r が 1 に近いときは（擬似的）空間周期倍化分岐以外の分岐が発生することがあるが，輸送費用の低下に伴う一様分布からの集積の過程を分析する本論では問題とならない）．よって，空間周期倍化なら $k = n/2$ ，擬似的空間周期倍化なら $k = (n-1)/2$ の固有値を求めることで，形式的にブレイクポイントを求めることができる．

(4) 空間割引行列 D の固有値とブレイクポイント

都市数が偶数の時は，空間周期倍化に対応する $k = n/2$ 番目の固有値，奇数の時は擬似的空間周期倍化に対応する $k = (n-1)/2$ 番目の固有値を求めた．尚，固有値は正規化した値である．（ $l \in \mathbb{N}$ ）

○都市数が偶数の時

$$\epsilon_{n/2} = \begin{cases} \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2 & (n = 4l) \\ \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2 \frac{1+r^{n/2}}{1-r^{n/2}} & (n = 4l+2) \end{cases} \quad (3a) \quad (3b)$$

○都市数が奇数の時（ $n = 2l+1$ ）

$$\epsilon_{(n-1)/2} = \frac{(1-r)^2 \left\{ (2 \sin \frac{\pi}{2n}) (-r)^{(n+1)/2} + r + 1 \right\}}{(1+r-2r^{(n+1)/2}) \left\{ r^2 + (2 \cos \frac{\pi}{n}) r + 1 \right\}} \quad (4)$$

式 (3a), (3b), (4) が分岐発生点の値 ϵ^* となるときの r の値が，ブレイクポイントとなる．都市数が偶数ならば， $\epsilon_{n/2} = \epsilon^*$ ，都市数が奇数ならば， $\epsilon_{(n-1)/2} = \epsilon^*$ のそれぞれの方程式を解くことによって，一般の都市数におけるブレイクポイントを求めることができる．

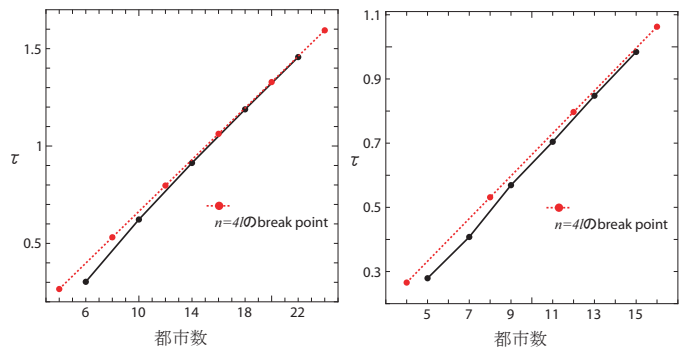


図-3 $n = 4l + 2$

図-4 $n = 2l + 1$

(5) ブレイクポイントの収束性

都市数 n を大きくしていくと， $0 < r \leq 1$ より式 (3b), (4) の極限値を求めることができる．式 (3b) は，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2 \frac{1+0}{1-0} \right\} = \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2 \quad (5)$$

となり，式 (4) も同様にすると，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon = \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2 \quad (6)$$

となる．都市数 n が 4 の倍数以外のいかなる時でも， $n \rightarrow \infty$ で $n = 4l$ の時の式 (3a) に収束するといえる．

(6) 数値例

数値解析によりブレイクポイントを計算した．解析手法は，一様分布上における固有値解析と分岐点から枝分かれする分岐解の追跡からなる．図-3 は都市数が $n = 4l+2$ ，図-4 は都市数が奇数のときで，都市毎にブレイクポイントをプロットした．どちらの図でも都市数の増加に伴い，ブレイクポイントが赤点線の $n = 4l$ に近づいていくのが確認できる．この結果は (5) の議論と整合的である．

4. 結論

- ① 空間割引行列の固有値が，都市数が奇数の時も一般式として表すことができる．
- ② 都市数の増加に伴い，いかなる都市数でも空間割引行列の固有値は $n = 4l$ の時の固有値に収束する．

参考文献

- 1) Ikeda, K., Murota, K., Akamatsu, T. and Takayama, Y. : Agglomeration patterns in a long narrow economy of a new economic geography model: Analogy to a racetrack economy, *International Journal of Economic Theory*, forthcoming.
- 2) Forslid, R. and Ottaviano, G. I. : An analytically solvable core-periphery model, *Journal of Economic Geography*, Vol. 3, pp. 229-240, 2003.
- 3) 赤松隆，高山雄貴，池田清宏，菅澤晶子，佐藤慎太郎：1次元多都市システムにおける人口集積パターンの創発メカニズム，土木学会論文集 D Vol. 66, No. 4, pp. 442-460, 2010.