正六角形格子および正方形格子において発現する分岐パターンの幾何学的考察

東北大学工学部 学生会員 ○木暮洋介
東北大学大学院工学研究科 フェロー会員 池田清宏
東北大学大学院工学研究科 学生会員 恩田幹久

1. はじめに

経済地理学の Christaller (1933)[1) は，中心地理論を提唱し，一様空間における人口集積の正六角形パターンの存在を予測した．中心地理論はミクロ経済学的な根拠を欠いており，あくまで幾何学的なアプローチのみに基づく推論であった．これに対し，Ikeda et al. (2016)[2) は，正六角形格子に対する群論的分岐理論に基づく二重フーリエ級数を用いた空間周波数解析手法を提案した．その結果，南ドイツやアメリカ合衆国東部において正六角形パターンを検出し，中心地理論に科学的な裏付けを与えた．しかし，正六角形以外の人口集積パターンが存在するかについては未解明のままであった．

本研究では，正方形格子に対する群論的分岐理論に基づく二重フーリエ級数を新たに導入し，人口集積の正方形パターンを表現するとともに，正六角形パターンとの幾何学的な比較を行う．また，実際に正六角形パターンが検出された南ドイツを対象として，正方形格子による人口分布の空間周波数解析を行い，正方形パターンを探査する．

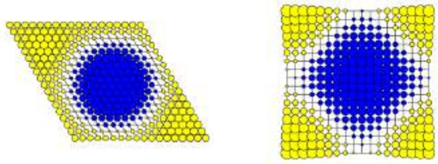
2. 群論的分岐理論に基づく二重フーリエ級数

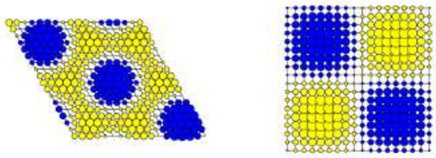
正六角形格子に対する群論的分岐理論に基づく二重フーリエ級数は，Ikeda & Murota (2014)[3) により導出されている．この級数を列ベクトルとして定義される座標変換行列 Q は，人口の一様分布状態において，経済モデルから導出される支配方程式の Jacobi 行列 J を対角化する．すなわち，Q の列ベクトルが J の固有ベクトルとなる．また，Q は同じ値を持つ固有値に対応した固有ベクトルごとに，部分行列 Q^{μ} に分けられる．分岐パラメータの変化により，一様分布状態からの分岐が生じるが，分岐解はゼロ固有値に対応する固有ベクトルの線形結合の方向に存在する．このとき，群論的分岐理論により，正六角形パターンを表す理論分布 $\boldsymbol{q}^{\mu}_{hexa}$ が分岐解として発現することが証明されている．本研究で着目する 18×18 正六角形格子においては，$\boldsymbol{q}^{\mu}_{hexa}$ として 37 種類のパターンが存在する．

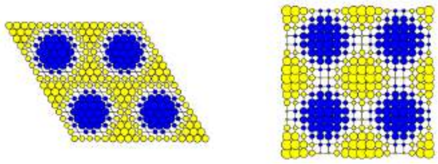
一方，本研究では新たに正方形格子に対する群論的分岐理論に基づく二重フーリエ級数を体系化し，正方形パターンを表す理論分布 $\boldsymbol{q}^{\mu}_{sqr}$ が存在することを証明した．本研究で着目する 18×18 正方形格子においては，$\boldsymbol{q}^{\mu}_{sqr}$ として 54 種類のパターンが存在する．

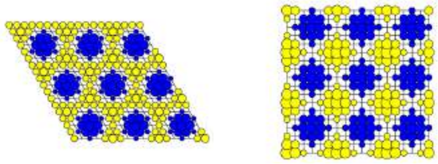
3. 一様分布状態から発現する分岐パターン

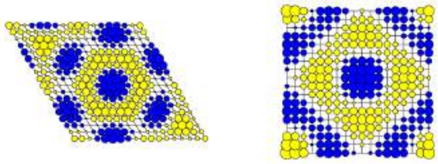
前章で述べた $\boldsymbol{q}^{\mu}_{hexa}$ および $\boldsymbol{q}^{\mu}_{sqr}$ により，対称性を持った人口集積パターンを表現できる．ここでは低周波のパターンに着目し，幾何学的特徴に基づいた分類を行う．


(a) 一極集中パターン


(b) 直線分布パターン


(c) 4 都市パターン


(d) 9 都市パターン


(e) 中心 · 衛星都市パターン

図–1 格子上で発現するパターン

図–1 の左側に正六角形格子上のパターンを，同図の右側に対応する正方形格子上のパターンを示す．ここで，図中の青色の円は人口集中，黄色の円は人口分散を表しており，円の大きさはその程度を表す．図–1(a) は，単一の中心都市の形成を表現している．図–1(b) は，一直線状に分布する中心都市の形成を表現している．図–1(c) は，4 つの中心都市の形成を表現している．図–1(d) は，9 つの中心都市の形成を表現している．図–1(e) は，中心都市ならびに衛星都市の形成を表現している．都市数の増加に伴い，正六角形格子上のパターンの方がより緻密な印象を与えている．

4. 二重フーリエ級数による空間周波数解析手法

領域 $\boldsymbol{x}$ における人口分布 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})$ は，正六角形格子および正方形格子に対する群論的分岐理論に基づく二重フーリエ級数により，以下のように展開できる．

Key Words: 空間パターン，人口動態分析，中心地理論
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06 東北大学工学部建築 · 社会環境工学科 数理システム設計学研究室, Phone: 022-795-7420, Fax: 022-795-7418, E-mail: yosuke.kogure.t2@dc.tohoku.ac.jp

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\mu} \sum_{i} c_i^{\mu}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{q}_i^{\mu} \tag{1}$$

$\boldsymbol{q}_i^{\mu}$ は，正六角形格子および正方形格子に対応した Q^{μ} の第 i 列ベクトルであり，$c_i^{\mu}(\boldsymbol{x})$ は重み係数である．また，各 μ におけるベクトル和を $\boldsymbol{q}^{\mu}(\boldsymbol{x})$ とおくことにより，式 (1) は，

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\mu} \boldsymbol{q}^{\mu}(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

と書き直せる．人口分布データを用いた解析では，パワースペクトル $\|\boldsymbol{q}^{\mu}(\boldsymbol{x})\|^2$ を測定し，卓越成分を検出する．

5. 南ドイツにおける正方形パターンの探査

南ドイツにおける解析領域を図–2 に示す．この領域には，正方形領域 I および II と，菱型領域 III が含まれている．

領域 I における人口分布を正方形格子上に射影したものを図–3(a) に示す．この人口分布を解析した結果，図–3(b) に示すように，$\boldsymbol{q}^{(8;2,1)}$ の卓越を確認した．同図内に示す分布図は，測定された $\boldsymbol{q}^{(8;2,1)}$ が示す空間パターンであるが，中心 · 衛星都市パターンを表す理論分布 $\boldsymbol{q}_{sqr}^{(8;2,1)}$ と概ね一致している．人口集中を意味する青色の部分と実都市の位置が整合していない部分はあるものの，都市ネットワークとして図–3(c) に示す解釈に至ることができた．

領域 II における人口分布を正方形格子上に射影したものを図–4(a) に示す．この人口分布を解析した結果，図–4(b) に示すように，$\boldsymbol{q}^{(8;2,1)}$ の卓越を確認した．同図内に示す分布図は，測定された $\boldsymbol{q}^{(8;2,1)}$ が示す空間パターンであるが，中心 · 衛星都市パターンを表す理論分布 $\boldsymbol{q}_{sqr}^{(8;2,1)}$ とは著しく異なっている．しかし，人口集中を意味する青色の部分と実都市の位置は整合しており，都市ネットワークとして図–4(c) に示す解釈に至ることができた．

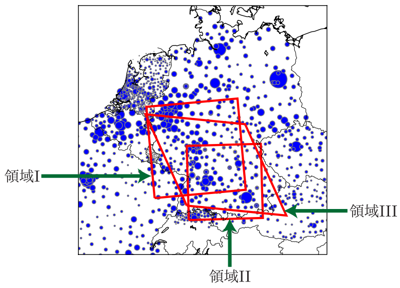
領域 III では，正六角形格子による解析を行った．領域 III における人口分布を正六角形格子上に射影したものを図–4(a) に示すとともに，解析結果から得られた都市ネットワークを図–5(b) に示す．この六角形ネットワークは，図–3(c) および図–4(c) に示したネットワークを内包している．

6. 結論

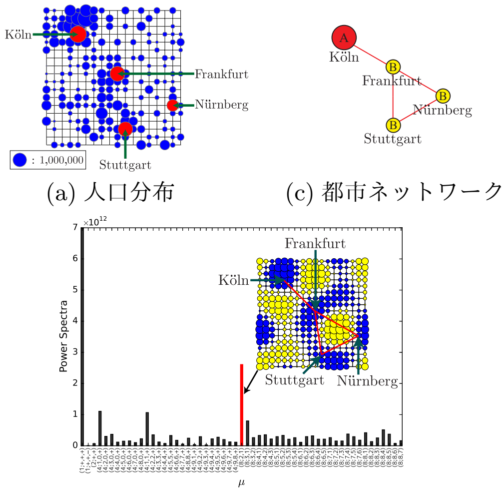
正方形格子による解析の結果，南ドイツにおける正六角形パターンの一部が検出され，ある程度の成功を収めることができたといえる．しかし，正六角形格子による解析のように，明瞭なパターンを得ることはできなかった．正方形格子上で正六角形パターンを無理やり捉えようとしたために，前章で示したような，実人口分布と整合しないような結果が得られたものと思われる．

参考文献

1) W. Christaller: *Die zentralen Orte in Süddeutschland*, Gustav Fischer, Jena, 1933. English translation: *Central Places in Southern Germany*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1966.
2) K. Ikeda, K. Murota, Y. Takayama, M. Kamei: Group-theoretic spectrum analysis of hexagonal city distributions in Southern Germany and Eastern USA, *MPRA Paper*, University Library of Munich, Germany, 2016.
3) K. Ikeda, K. Murota: *Bifurcation Theory for Hexagonal Agglomeration in Economic Geography*, Springer-Verlag, Tokyo, 2014.



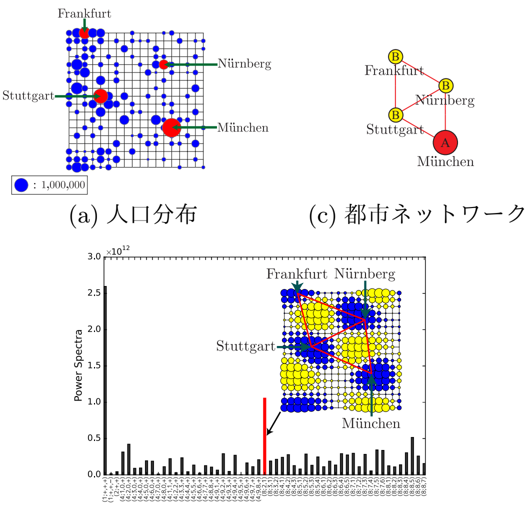
図–2 解析領域 (領域 I および II：正方形，領域 III：菱型)



(a) 人口分布　(c) 都市ネットワーク

(b) パワースペクトル図 (卓越成分を赤色で示す)

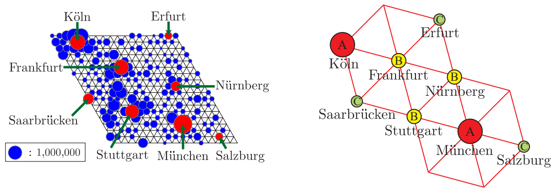
図–3 領域 I における解析結果



(a) 人口分布　(c) 都市ネットワーク

(b) パワースペクトル図 (卓越成分を赤色で示す)

図–4 領域 II における解析結果



(a) 人口分布　(b) 都市ネットワーク

図–5 領域 III における解析結果