

2次元集積経済モデルの分岐解析：空間周期倍化挙動の解明

東北大学 学生会員 ○恩田幹久
 東北大学 フェロー会員 池田清宏
 金沢大学 正会員 高山雄貴

1. はじめに

新経済地理学（以降、NEG）分野において、生産要素の地域間移動、および、それに伴う経済活動の空間的な集積分散現象を扱った一般均衡モデルが開発されており、ミクロ経済学的基礎に基づき、経済集積を説明する試みがなされている。経済集積が、どこに、どの程度生じるか知る事は、土木計画分野で必要とされる社会基盤整備の影響を予測・評価する際に不可欠である。

既往の研究¹⁾では、円周上に離散的に都市が配置された一次元空間のRacetrack economy（以降、RE）において、人口が増加する都市と減少する都市が互い違いに発現する「空間周期倍化現象」が重要と明らかにされた。しかし、実空間により近い2次元空間において、理論的な分析が不足しており、一つの経済空間で断片的な都市数に対する分析²⁾しかなされていない。

そこで本研究では、標準的なNEGモデルであるFor-sild & Ottaviano（以降、FO）モデル³⁾を用いて、Square・hexagon lattice economy（以降、SLE, HLE）の理論解析および数値解析を行う。ここで、2次元空間で発生する分岐現象は複雑になることから、空間周期倍化現象（図-1）に着目し、分析を行う。

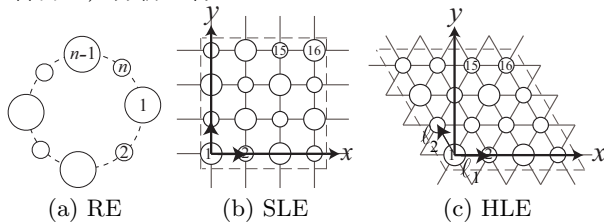


図-1 3つの経済空間における空間周期倍化

2. FOモデルと調整ダイナミクスの概要

FOモデルと人口移動の調整ダイナミクスであるreplicator dynamicsを用いた理論解析の詳しい説明は省略する（Ikeda et al.⁴⁾ 参照）。ここで、replicator dynamicsは、

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} = \text{diag}[\lambda] \left(\mathbf{v}(\lambda, \tau) - \left[\sum_k \lambda_k v_k(\lambda, \tau) \right] \mathbf{1} \right) \quad (1)$$

と表され、人口 λ 及び都市に住む効用 $\mathbf{v}$ と効用水準の差に比例して人口を調整する。ここで $k = n \times n$ は都市数を、 τ は分岐（輸送費用）パラメータを表す。この τ の減少に伴い、人口集積が引き起こされる。長期均衡状態 λ^* では、 $\mathbf{F} = 0$ を満たし、この局所的な漸近安定性は、 $\mathbf{J} = \partial \mathbf{F} / \partial \lambda$ の固有値により調べる事ができる。具体的には、調整ダイナミクスのJacobi行列 $\mathbf{J}$ の固有値の実部が全て負であれば安定、そうでなければ不安定である。パラメータの変化に伴い均衡状態の安定性が変化する現象は、数学的には分岐現象と呼ばれ、その分岐現象により、様々な集積パターンを創発する。

3. 調整ダイナミクスのJacobi行列 $\mathbf{J}$ の固有値

2次元NEGモデルで創発する集積パターンを解析的に把握するには、均衡解の分岐特性を明らかにする必要がある。すなわち、調整ダイナミクスのJacobi行列 $\mathbf{J}$ の固有値が、分岐パラメータ τ に対して、どのような特性を持つか把握する必要がある。具体的には、群論的分岐理論に基づく座標変換行列⁵⁾を用いる事で、Jacobi行列 $\mathbf{J}$ の固有値 β が、都市 i, j 間の交易条件を表す空間割引行列 $\mathbf{D} = [d_{ij}]$ の固有値 ϵ の関数で表される⁴⁾。この空間割引行列 $\mathbf{D}$ は、経済モデルに依存せず、経済空間にのみ依存する。SLE・HLEでは、複数種類の固有値・固有ベクトルが存在するが、本稿では、比較を簡単にするために空間周期倍化に対応する固有値 ϵ ・固有ベクトルを選択し、求める。ここで $n = 4$ の場合の固有ベクトル $\boldsymbol{\eta}$ を例として次式に示す。

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{cases} \boldsymbol{\eta}_{\text{RE}} = (1, -1, 1, -1) \\ \boldsymbol{\eta}_{\text{SLE}} = \boldsymbol{\eta}_{\text{RE}} \otimes \boldsymbol{\eta}_{\text{RE}} \\ \boldsymbol{\eta}_{\text{HLE}} = (3, -1, 3, -1, -1, -1, -1, -1, \\ \quad 3, -1, 3, -1, -1, -1, -1, -1) \end{cases}$$

この固有ベクトルを用いて、 $(\mathbf{D} / \sum_{j=1}^K d_{ij}) \boldsymbol{\eta} = \epsilon \boldsymbol{\eta}$ という関係式より各都市数における空間割引行列 $\mathbf{D}$ の固有値 ϵ は、次式のように求められる。

$$\epsilon_{\text{SLE}} = \epsilon_{\text{RE}}^2 = \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^4, \quad n = 4, 8, 16, \dots \quad (2)$$

$$\epsilon_{\text{HLE}} = \begin{cases} [(1-r)/(1+3r)]^2 & n = 4, \\ \frac{1-2r+4r^2-6r^3+5r^4-2r^5}{1+6r+12r^2+18r^3+21r^4+6r^5} & n = 8, \\ \frac{1-2r+4r^2-6r^3+8r^4-10r^5+12r^6-14r^7+\dots}{1+6r+12r^2+18r^3+24r^4+30r^5+36r^6+42r^7+\dots} & n = 16, \\ \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2 \frac{1+r^2}{1+4r+r^2} & n = \lim_{m \rightarrow \infty} 2m. \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $r(0 \leq r \leq 1)$ は輸送費用パラメータ τ を正規化した値である。この式を縦軸に ϵ 、横軸に r をとった図-2に示す。なお、紙面の都合上省略した $n = 2$ の式の概形も合わせて示す。図-2より、SLEにおいて、固有値は都市数の影響を受けず、REの固有値で表す事ができることから、SLEにおける空間周期倍化現象は、REにより近似されている事がわかる。一方、HLEの固有値は、式(3)に示されるの様に関数形は異なるが、一つ値に収束しているが図-2よりわかる。

全ての都市の条件が均一となる一様分布状態 $\bar{\lambda}$ を初期状態とし、Jacobi行列 $\mathbf{J}$ の固有値 β を考える。を考える。この時の β は、

$$\beta = \Psi(\epsilon) = \frac{\epsilon[\kappa + \kappa' - (\kappa\kappa' + 1)\epsilon]}{1 - \kappa\epsilon} \quad (4)$$

と ϵ の関数で表される．ここで、 $\kappa = \mu/\sigma, \kappa' = \mu/(\sigma - 1)$ であり、 μ, σ はそれぞれ工業財への支出割合、代替の弾力性を表す経済モデルのパラメータである．式 (4) より、 $\beta = 0$ となり、分岐が発生する臨界値 ϵ^* は、 $\epsilon^* = (\kappa + \kappa')/(\kappa\kappa' + 1)$ と得られる．

式 (2),(3) より、 $\epsilon(r)$ の逆関数 $r(\epsilon)$ を求めることで、分岐点 τ^*/n は、

$$\tau^*/n = \frac{1}{\mathcal{L}(\sigma - 1)} \log \left(\frac{1 + (k - 1)(\epsilon^*)^{1/2p}}{1 - (\epsilon^*)^{1/2p}} \right) \quad (5)$$

と得られる．ここで、

$$p = \begin{cases} 2 & \text{for the SLE.} \\ 1 & \text{for other.} \end{cases} \quad k = \begin{cases} 4 & \text{for the HLE.} \\ 2 & \text{for other.} \end{cases} \quad (6)$$

である．HLE において、 $n = 8, 16, \dots$ の場合に逆関数 $r(\epsilon)$ を求める事が困難なので、 $n = 4$ の場合を代表として用い、近似している．

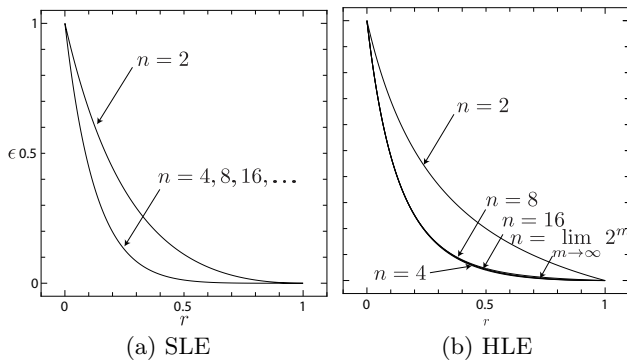


図-2 2次元空間における空間割引行列 D の固有値 ϵ

4. 集積挙動の解析結果

本章では、前章までに得られた理論解析結果をわかりやすく示すために、輸送費用の減少に伴い2次元モデルで創発する空間周期倍化の集積パターンの計算例を示す．ここでは、Ikeda et al.¹⁾ と同様に、計算分岐理論と群論的分岐理論を組み合わせた方法を採用し、空間周期倍化が繰り返して発生する「空間周期倍化分岐カスケード」に対応する経路を追う．数値計算結果は、パラメータ $(\mu, \sigma, n) = (0.4, 10, 8)$ を縦軸に都心における各人口の割合、横軸に τ/n をとった分岐図を図-3 を示す．実線は安定解を、点線は不安定解を表し、○は、3. 章で理論解析した一様分布から発生する分岐点を表し、●は、その他の分岐点を表す．分岐点○は、式 (5) と一致する事が確認できた．

SLE では市場域が、

$$N_{\text{market}} = 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2^2 \rightarrow \dots \rightarrow 2^6$$

と、拡大している．この拡大の仕方は、RE における空間周期倍化分岐カスケードと同じである．しかし、SLE における空間周期倍化分岐カスケードは、第1段階として、 x, y 軸の2方向に対し、空間周期倍化が発生し、第2段階

として、 $x = y$ 方向に対して、空間周期倍化が発生する．この様に2段階の変化を繰り返す点で、RE と異なる．また、SLE において状態 C は安定化する領域を見つける事が出来なかった事から安定性に関する議論が残る．一方、HLE では市場域が、

$$N_{\text{market}} = 1 \rightarrow 4 \rightarrow 4^2 \rightarrow 4^3$$

と漸次拡大している．こちらは、 $l_1, l_2, l_1 + l_2$ の3方向に対し、同時に空間周期倍化が発生している．なお、HLE において、輸送費用減少に伴い、最初に発生する分岐が空間周期倍化分岐ではないため、分岐点が安定解から発生していない点には注意が必要である．

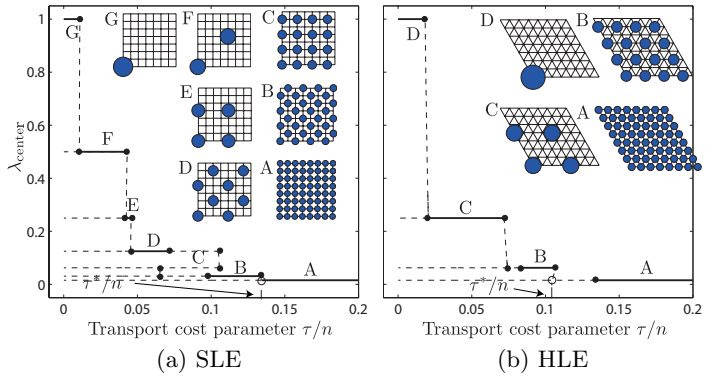


図-3 2次元経済空間における空間周期倍化

5. 結論

本研究では、3つの経済空間の空間周期倍化分岐に着目し、理論解析と数値解析を行った．これにより、2次元空間 NEG モデルにおける分岐点の理論解を提案する事と共に、その集積挙動を確認する事で、3つの経済空間の特性を統一的に比較した．モデルの性質を把握する事に用いられている1次元空間の RE は、2次元空間である SLE を十分に近似してできているが、最も現実に近い2次元空間の HLE を直接近似する事はできない事が判明した．しかし、HLE において、「空間周期倍化分岐カスケード」が発生しており、特徴的な挙動をとらえる事が出来ている事と式 (5) に示す様に分岐点の式構造は RE, SLE と類似している．このことから、RE を用いた分析の有用性を確認する事が出来た．

参考文献

- 1) K. Ikeda, T. Akamatsu, T. Kono: Spatial peropd-doubling agglomeration of a core-periphery model with a system of cities, *Journal of Economic Dynamics & Control* 36, 754-778, 2012.
- 2) Ikeda, Kiyohiro, Kazuo Murota, and Yuki Takayama. 2014. "Stable economic agglomeration patterns in two dimensions: beyond the scope of central place theory," *METR* 2014-24, University of Tokyo, Tokyo.
- 3) Forslid, R. and Ottaviano, G.: An Analytically Solvable Core-Periphery Model, *Journal of Economic Geography*, Vol. 3, 229-240, 2003.
- 4) K. Ikeda, K. Murota, T. Akamatsu, Y. Takayama: Agglomeration patterns in a long narrow economy of a new economic geography model: analogy to a racetrack economy, To appear in *International Journal of Economic Theory*, 2017.
- 5) K. Ikeda, K. Murota: *Bifurcation Theory for Hexagonal Agglomeration in Economic Geography*, Springer-Verlag, Tokyo, 2014.