

多緩和時間係数型の衝突則を用いた格子ボルツマン法による物体周りの乱流解析

東北大学大学院

学生会員 ○佐藤 兼太

東北大学災害科学国際研究所

正会員 越村 俊一

1. はじめに

津波氾濫流などに代表される自然界の多くの流れは乱流である。よって、乱流のモデル化は数値流体力学において重要なテーマとなっている一方で、浅水長波理論に基づく格子ボルツマン法(以下、LBM)においては、乱流モデルの整備が十分に進んでいないのが現状である。これは、格子BGKモデルが依然として一般的な衝突則として用いられていることに原因がある。この問題に対して、Lui *et al.*(2012)は多緩和時間係数型の衝突則を用いて、平面キャビティ流れの高レイノルズ数解析に成功しているが、Lui *et al.*が用いた乱流モデルは、格子BGKモデルで用いられる諸量から計算が行われている現状である。

本研究では上記の問題に対して、多緩和時間係数型の衝突則で計算される諸量を用いて、Sub-Grid Scaleモデルを定式化し、その浅水長波流れ解析への適用について基礎的な検証およびLui *et al.*の手法と比較した際の計算パフォーマンスについての評価を行う。そして、新たな津波数値解析手法としてのLBMについて検討する。

2. 格子ボルツマン法

(1) 格子ボルツマン法の概要

LBMは気体分子運動論をアナロジーとする新しい数値流体モデルである。連続体である流体を規則的な格子上を移動する仮想的な粒子の集合体と近似し、その仮想粒子の並進と衝突の時間発展から巨視的な流れ場の諸量を求めるメゾスケールの解析手法と位置づけられている。LBMの特徴として、各格子点における計算が局所的であるため、並列計算による計算の高速化が期待されることが挙げられる。以下ではZhou(2002)とPeng *et al.*(2014)に倣い、浅水長波理論に基づくLBMおよび本解析の要点のみを述べる。詳細は参考文献を参照されたい。

(2) 格子形状

本研究ではLBMの平面2次元格子形状として、図-1に示す2次元9方向型格子を用いる。仮想粒子の運動方向は図-1の1から9のベクトル方向 $\mathbf{e}_\alpha$ に制限される。

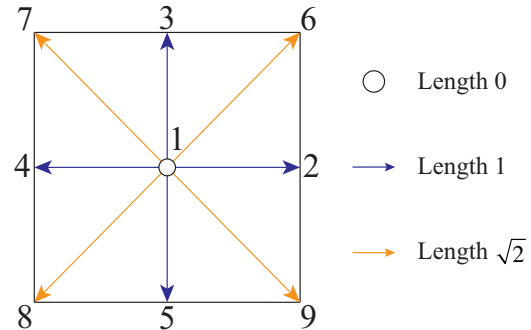


図-1 2次元9方向型格子形状

(3) 格子ボルツマン方程式

LBMは、式(1)に示す格子ボルツマン方程式を支配方程式として、粒子分布関数 f_α の時間発展を解く。

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t) + \Omega_\alpha[f_\alpha(\mathbf{x}, t)] \quad (1)$$

ここで、 $\Omega_\alpha[f_\alpha(\mathbf{x}, t)]$ は、仮想粒子の衝突項であり、本研究では式(2)に示す、多緩和時間係数型の衝突則を用いる。

$$\Omega_\alpha[f_\alpha(\mathbf{x}, t)] = -\mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{S}} [\mathbf{M} \cdot f_\alpha(\mathbf{x}, t) - m_\alpha^{eq}(\mathbf{x}, t)] \quad (2)$$

多緩和時間係数型の衝突則は、(1)粒子分布関数 f_α を変換行列 $\mathbf{M}$ を用いて、それぞれ独立したモーメント空間に線形変換し、(2)モーメント分布関数 m_α が、モーメント空間毎に定義される局所平衡量 m_α^{eq} に、それぞれ対角行列 $\hat{\mathbf{S}}$ で定義される緩和時間で緩和する。(3)逆変換行列 $\mathbf{M}^{-1}$ により、衝突後のモーメント分布関数 m_α を、粒子分布関数 f_α にフィードバックする、という手順で仮想粒子の衝突計算が行われる。なお本研究では、局所平衡量 m_α^{eq} の定義および対角行列 $\hat{\mathbf{S}}$ の値は、Peng *et al.*の報告を参考に設定した。

(4) 巨視的な物理量との関係

浅水長波理論に基づくLBMでは、流体の巨視的な物理量として全水深 h および断面平均流速 $\mathbf{u}$ が、それぞれ粒子分布関数 f_α の0次、1次モーメントから与えられる。

$$h = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{h} \sum_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} f_{\alpha} \quad (4)$$

キーワード: 格子ボルツマン法, 多緩和時間係数モデル, Sub-Grid Scaleモデル, 並列計算

連絡先: 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1 E302, TEL: 022-752-2082, FAX: 022-752-2083

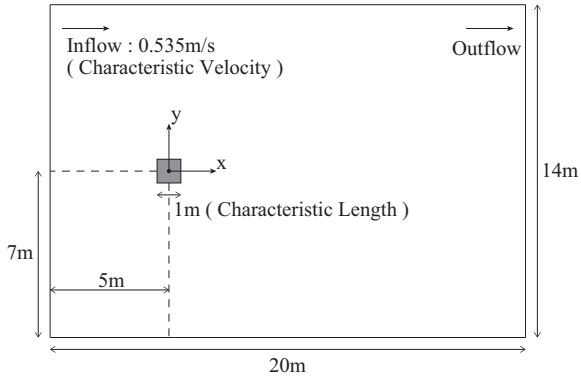


図-2 Lyn *et al.*の実験模式図と計算条件の設定

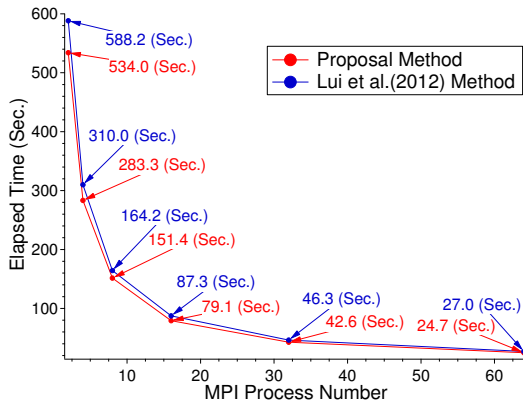


図-3 本手法とLui *et al.*の手法との計算パフォーマンスの比較

(5) Sub-Grid Scaleモデルの定式化

Zhouにより定式化された、浅水長波理論に基づくLBMのSub-Grid Scaleモデルは、式(5)で定義される粒子分布関数の非平衡量 f_{α}^{neq} の2次モーメントから計算される。

$$\Pi_{ij} = \sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} (f_{\alpha} - f_{\alpha}^{eq}) = \sum_{\alpha} e_{\alpha i} e_{\alpha j} f_{\alpha}^{neq} \quad (5)$$

ここで f_{α}^{eq} は、格子BGKモデルによる衝突項で用いられる局所平衡分布関数であり、多緩和時間係数型の衝突則を用いた場合、直接計算することができない。そこで本研究では、式(5)を参考に、モーメント空間における非平衡量 m_{α}^{neq} を式(6)のように新たに定義する。

$$m_{\alpha}^{neq} = m_{\alpha} - m_{\alpha}^{eq} \quad (6)$$

次に、式(5)で定義されているテンソル計算部分 $e_{\alpha i} e_{\alpha j}$ を変換行列 $\mathbf{M}$ の線形重ね合わせにより表現し、それを式(6)に乗じることで、式(5)で定義される非平衡量の2次モーメントと等価な値が得られるよう定式化を行った。

3. 数値解析例

本研究では、物体周りの高レイノルズ数解析として、Lyn *et al.*(1995)が行った実験の再現計算を行った。実験模式図および計算条件に関する設定を図-2に示す。はじ

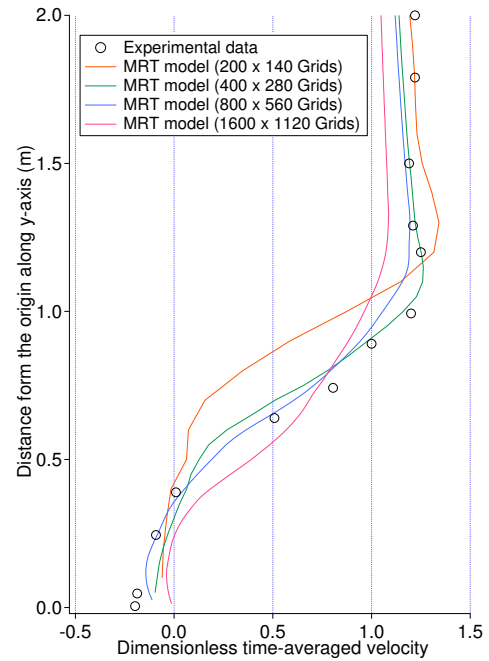


図-4 時間平均流速の実験結果および計算結果

めに、本手法とLui *et al.*の手法との計算パフォーマンスの比較を図-3に示す。いずれの手法もMPIにより並列化されており、メッセージ通信は並進前に粒子分布関数 f_{α} の送受信のみ行った。図-3より、本手法はLui *et al.*の手法と比べ9%程度、計算時間を短縮することが可能であることが分かる。さらに、図-2の $x = 1\text{m}$ 地点において y 軸方向に沿って計測した時間平均流速を図-4に示す。格子間隔の違いによる計算結果のばらつきがあるものの、本手法は実験結果をよく再現しているものといえる。

4. おわりに

本研究では、多緩和時間係数型の衝突則を用いてSub-Grid Scaleモデルを定式化し、検証を行った結果、本手法がLBMの浅水長波流れ解析においても有用であることを明らかにした。今後は陸上遡上計算手法の導入など、モデル拡張および高精度化に向けた研究を進める予定である。

参 考 文 献

- Lui H, Li M, and Shu A., Large eddy simulation of turbulent shallow water flows using multi-relaxation-time lattice Boltzmann model, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. **70**, 1573-1589 (2012).
- Lyn D. A., Einav S., Rodi W., and Park J. H., A laser-Doppler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder, *J. Fluid Mech.* **304**, 285-319 (1995).
- Peng Y., Zhou J. G., Zhang J. M., and Liu H., Lattice Boltzmann modeling of shallow water flows over discontinuous beds, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. **75**, 608-619 (2014).
- Zhou J. G., A lattice Boltzmann model for the shallow water equations, *Comput. Method. Appl. M.* **191**, 3527-3539 (2002).