

軸方向に非均質な Timoshenko 梁の平均せん断剛性

東北大学大学院工学研究科
東北大学大学院工学研究科
東北大学大学院工学研究科

○学生会員
正員
正員

新井晃朋
斉木 功
岩熊哲夫

1. まえがき

梁や板等の構造部材のせん断剛性評価は弾性論に端を発し、任意形状断面に対するせん断補正係数の解析的¹⁾および数値的研究が行われている。著者らの研究グループは、異種材料で構成される断面のせん断剛性を均質化法に基づき評価する方法を提案している²⁾。この方法では、断面の近似平面を定義し、その回転を拘束することにより梁にせん断変形を与えている。本研究では、図-1のように軸方向に一樣でない梁に対して、従来の方法ではせん断剛性が精度よく評価できないことを示し、その解決を試みる。

2. 剛体回転の拘束

(1) 幾何学的近似平面による回転の定義と拘束

代表体積要素（以降 RVE と記す）の、断面の y 軸周りの回転角 $\theta(x)$ を、 y - z 平面上の点におけるの変形後の x 方向位置を最小二乗近似した平面の傾きと定義する^{1),2)}。断面の図心に y, z 軸の原点を定め、 y 軸まわりの断面 2 次モーメントを $I(x)$ とすれば、断面の回転角は

$$\theta(x) = \frac{\int_A z u(x, y, z) dA}{I(x)} \quad (1)$$

と定義できる。RVE に純せん断変形を与えるためには RVE の平均回転がゼロであることが必要であり

$$\frac{1}{\ell} \int_0^\ell \theta(x) dx = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{\int_A z u(x, y, z) dA}{I(x)} dx = 0 \quad (2)$$

とすれば、純せん断変形を与えることができる²⁾。しかし断面形状が軸方向に変化する RVE の場合、式 (2) の右辺の被積分関数の分母に断面 2 次モーメントがあることで、回転角の軸方向の数値積分を行うことは困難である。したがって、せん断剛性を評価するために RVE に曲げせん断変形を与えて、後述する評価方法により RVE のせん断剛性を評価することを考える。

(2) 純曲げ時の反力を利用した剛体回転拘束

図-2 の左に示すような面内で剛性差が大きい（この例では剛性は 1000 倍）断面を持つ RVE に対して式 (2) を用いて回転拘束を行うと右に示すような変形を導いてしまう。そこで式 (1) を用いて境界条件を与える代わりに RVE を純曲げした時に生じる境界の反力分布を実数倍して改めて RVE の境界に作用させることで境界面の回転角 ${}^i\theta, {}^d\theta$ を拘束して曲げせん断変形を与えることを考える。

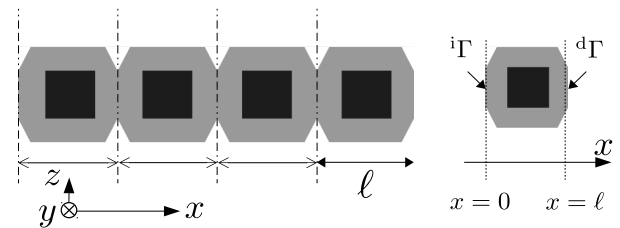


図-1 周期構造を有する非均質梁と代表体積要素 (RVE)

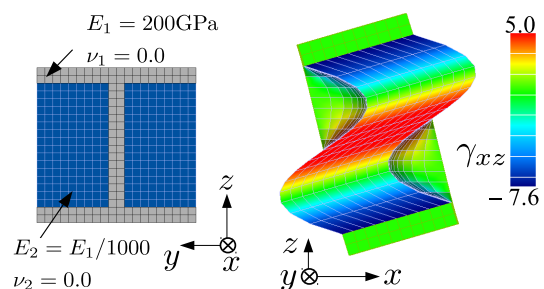


図-2 非均質矩形断面の変形図と断面図

まず図-3 の左上に示すように RVE に単位の曲率を与えて純曲げ変形させて、 y 軸まわりの曲げモーメント aM_b ($\alpha = i, d$) を求める。次に図-3 の下図のように単位のせん断ひずみ $\gamma = 1$ が生じるように曲げせん断変形させる。剛体回転を拘束するために両境界面に作用させるべき曲げモーメント aM の大きさを決定するためには RVE のせん断力の大きさが必要である。そこで断面の回転角と曲げモーメントの大きさの関係を求めるため試験的に作用させる曲げモーメント aM_0 を

$${}^aM_0 = c_\alpha \cdot {}^aM_b$$

として境界面に作用させる。ただし

$$c_\alpha = \begin{cases} -1 & \text{もし } \alpha = i \text{ のとき} \\ 1 & \text{もし } \alpha = d \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める。この時両境界面に生じる断面の回転角を ${}^a\theta_0$ とする。断面の回転角は式 (1) で定義される回転角をここでも用いる。さらに図-3 の右下に示すように、RVE を曲げせん断する際、 ${}^aM_b = 0$ であれば、RVE は剛体回転をすることから ${}^a\theta = \gamma$ となる。このことから断面の回転角と曲げモーメントの大きさの関係

$$\frac{\gamma}{\gamma - {}^a\theta_0} = \frac{{}^aM}{{}^aM_0}$$

と求めることができる。

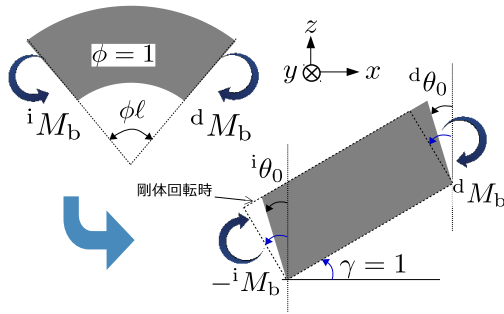


図-3 純曲げ変形時の反力曲げモーメントを利用した剛体回転拘束の概略図

以上から空間的に離散化された梁に単位曲率が生じるように純曲げ変形させた時に境界面上の節点 k に生じる x 方向反力 ${}^{\alpha}f_x^k$ ($\alpha = i, d$) とすると曲げせん断変形させるために境界面上の点に作用させるべき節点外力 ${}^{\alpha}F_x$ は

$${}^{\alpha}F_x^k = c_{\alpha} \frac{\gamma}{\gamma - \alpha\theta_0} {}^{\alpha}f_x^k$$

となる。

3. せん断剛性の評価方法

(1) Timoshenko 梁理論を用いた方法¹⁾ (方法 1)

長さ ℓ の平均化された RVE の曲げ剛性を $\overline{EI}$ 、せん断剛性を $\overline{\kappa GA}$ として RVE が両端の境界で $i\theta = d\theta = 0$ の下で曲げせん断変形をする時、たわみ δ とせん断力 Q の関係は、Timoshenko 梁理論から

$$\delta = \frac{Q\ell^3}{12\overline{EI}} + \frac{Q\ell}{\overline{\kappa GA}} \quad (3)$$

と表せる。この関係から平均化された梁のせん断剛性は

$$\overline{\kappa GA} = \frac{\ell}{\frac{\delta}{Q} - \frac{\ell^3}{12\overline{EI}}} \quad (4)$$

となる。

(2) ひずみエネルギーの等価性を用いた方法 (方法 2)

平均化された Timoshenko 梁と RVE におけるひずみエネルギーが等しい、すなわち

$$\int_0^{\ell} \frac{Q^2}{2\overline{\kappa GA}} dx + \int_0^{\ell} \frac{M^2}{2\overline{EI}} dx = \int_V \sum_i \sum_j \frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{2} dV \quad (5)$$

と仮定する。ここに RVE が曲げせん断変形する時のせん断力を Q 、曲げモーメントを M 、RVE の体積領域 V 内に生じる応力とひずみ成分を σ_{ij} 、 ε_{ij} とする。せん断剛性について解くと

$$\overline{\kappa GA} = \left(\frac{1}{\ell Q^2} \left\{ \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dV - \int_0^{\ell} \frac{M^2}{2\overline{EI}} dx \right\} \right)^{-1} \quad (6)$$

となる。

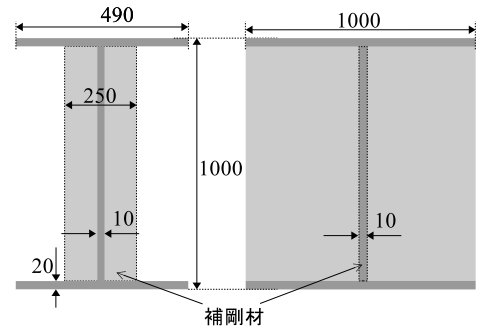


図-4 代表体積要素の断面図（左）と側面図（右）（単位：mm）

表-1 I 形断面梁の平均せん断剛性（単位： $\times 10^8 \text{ N}$ ）

評価方法	補剛材	
	なし	ある
1	9.58302	9.62303
2	9.58955	9.63747
Cowper ¹⁾	9.54002	

4. I 形断面梁のせん断剛性評価

Young 率 $E = 200 \text{ GPa}$ 、Poisson 比 $\nu = 0$ の材料で構成された、図-4 に示す I 形断面の RVE に対して、式 (3) を用いて剛体回転拘束を行った。また後述の補剛材のない断面の RVE とは図-4 の補剛材を除いたものを示す。

(1) 補剛材のない I 形断面の代表体積要素

回転拘束を行い、曲げせん断変形した RVE に対して評価方法 1 および 2 で評価したせん断剛性は表-1 の通りである。参照解¹⁾との相対誤差はそれぞれ 4.51×10^{-3} 、 5.19×10^{-3} でありどちらも参照解¹⁾に近い剛性を評価した。また評価方法 1 と 2 では 1 の方が参照解¹⁾に近く低い剛性を評価する。

(2) 補剛材のある I 形断面の代表体積要素

式 (2) では回転拘束が困難である図-4 の RVE に対して提案する回転拘束を行い曲げせん断変形を与えた。各評価方法により求めたせん断剛性を表-1 に示す。参照解¹⁾との相対誤差はそれぞれ 8.70×10^{-3} 、 1.02×10^{-2} であった。評価方法 1 の方が参照解¹⁾に近く、低い剛性を評価する。補剛材が付き、軸方向に非一様な断面だが、補剛材の厚さは RVE の長さに対して $\frac{1}{100}$ しかない。一様断面の場合と比べて剛性は大きく変化しないはずである。評価方法 1、2 のそれぞれで、補剛材を付けた事により増加したせん断剛性の割合は 4.17×10^{-3} 、 5.00×10^{-2} であり、適切に剛性が評価できたと考えられる。

参考文献

- 1) Cowper, G. R. : The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.33, pp.335-340, 1966.
- 2) 齊木功, 鍵一彰, 山田真幸, 瀬戸川敦, 岩熊哲夫 : 非均質な Timoshenko 梁の平均物性, 土木学会応用力学論文集, Vol.15, pp.161-169, 2012.