変形勾配テンソルの乗算分解に基づく有限変形拡張下負荷面モデルの定式化と数値実装

東北大学大学院工学研究科　学生会員　○井口 拓哉
東北大学大学院工学研究科　正会員　山川 優樹
東北大学大学院工学研究科　フェロー会員　池田 清宏

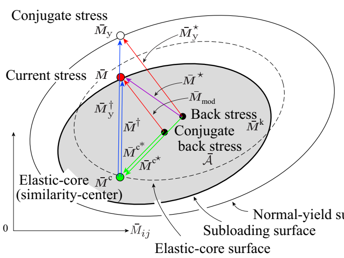
1.　はじめに

非古典塑性論に基づく弾塑性モデルの一種である拡張下負荷面モデル [1] は正規降伏面に対する下負荷面の相似中心（弾性核）が塑性変形とともに移動することにより，繰返し負荷挙動を正確に表現し得る．拡張下負荷面モデルの模式図を**図–1** に示す．

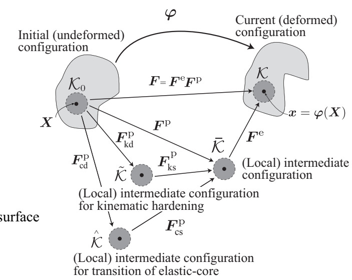
拡張下負荷面モデルに関する既往の研究は多く存在するが，速度形の亜弾性構成則を採用し，また移動硬化の背応力や相似中心（弾性核）の発展則も速度形で規定されている．これを有限変形に拡張する際には客観応力速度を用いることとなる．しかし，用いる客観応力速度の種類によっては，せん断時の応力振動といった明らかに不自然な挙動を示したり，弾性変形にも関わらずエネルギー保存性が保証されないなどの問題が挙げられる．

このことを受けて，筆者らは拡張下負荷面モデルを有限変形理論の枠組みで合理的に定式化するための前段階として，微小変形理論に基づき，ひずみテンソルの弾性・塑性部分への加算分解と超弾性構成則を用いた拡張下負荷面モデルの再定式化を行った [2]．これを踏まえて本論文では，変形勾配テンソルの乗算分解に基づく有限変形理論の枠組みでの拡張下負荷面モデルの定式化とクローゼストポイント・プロジェクションに基づくリターンマッピングを用いた完全陰的応力計算の定式化を提案する．

さらに，提案モデルを適用した構造解析例として，金属材料の引張試験を模した有限要素シミュレーションを行い，境界値問題の解析における解の収束性や提案手法のロバスト性を検証する．



図–1　拡張下負荷面モデルの模式図



図–2　各配置の関係図

2.　有限変形拡張下負荷面モデルの定式化

本論文では，降伏条件は金属一般を対象とした von Mises 型を採用する．また，物質時間微分は上付きドット $(\dot{\ })$ で表す．

(1)　変形勾配テンソルの乗算分解に基づく諸量の定義

まず，全変形勾配 $\boldsymbol{F}$ を一般的な弾性変形勾配 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$ と塑性変形勾配 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ に乗算分解できるものとし，移動硬化の背応力と弾性核については非線形移動硬化を考慮した 1 次元レオロジーモデルの概念をもとに，塑性変形勾配 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$ について次式のようにエネルギー貯留部分 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{ks}}, \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{cs}}$ とエネルギー消散部分 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{kd}}, \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{cd}}$ への乗算分解を導入する．ここで，下添字 ‘k’，‘c’ はそれぞれ移動硬化と弾性核に関するものであることを意味する．

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}, \quad \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{ks}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{kd}}, \quad \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{cs}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{cd}} \tag{1}$$

上式の乗算分解により，基準配置 $\mathcal{K}_0$ と現配置 $\mathcal{K}$ に加え，中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ と配置 $\tilde{\mathcal{K}}, \hat{\mathcal{K}}$ を新たに導入する．その配置の関係図を**図–2** に示す．

(2)　構成式

本論文では，neo-Hookean 超弾性モデルを用いる．中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ を参照する第二 Piola–Kirchhoff 応力テンソル $\bar{\boldsymbol{S}}$ は以下の通りである．ただし，$\boldsymbol{I}$ は恒等テンソルである．

$$\bar{\boldsymbol{S}} = \frac{\Lambda}{2}(\det \bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}} - 1)\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}-1} + \mu(\boldsymbol{I} - \bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}-1}) \tag{2}$$

ここで，材料定数 Λ および μ は線形弾性モデルにおける Lamé 定数に相当し，$\bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}} := \boldsymbol{F}^{\mathrm{eT}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$ は中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ を参照する弾性右 Cauchy–Green 変形テンソルである．

さらに，塑性変形勾配テンソルのエネルギー貯留部分 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{ks}}, \boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{cs}}$ は超弾性タイプの構成則を介してそれぞれ移動硬化の背応力と相似中心（弾性核）に関係づけられるとする．

(3)　中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ を参照する下負荷面関数

まず，中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ を参照する Mandel 応力 $\bar{\boldsymbol{M}} := \bar{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{e}}\bar{\boldsymbol{S}}$ を用いて修正応力 $\bar{\boldsymbol{M}}_{\mathrm{mod}}$ を以下のように定義する．

$$\bar{\boldsymbol{M}}_{\mathrm{mod}} = \bar{\boldsymbol{M}} - \bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = (\bar{\boldsymbol{M}} - \bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{c}}) - R(\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{k}} - \bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{c}}) \tag{3}$$

ここで，$\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{k}}$ は正規降伏面の中心点である背応力テンソル，$\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}} := \bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{c}} + R(\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{k}} - \bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{c}})$ は $\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{k}}$ と共役な下負荷面の中心点であり，$\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{c}}$ は相似中心（弾性核）である．これらはいずれも中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ を参照する量である．また，正規降伏比が $R = 1$ のとき，すなわち正規降伏状態では $\bar{\boldsymbol{M}}_{\mathrm{mod}}|_{R=1} = \bar{\boldsymbol{M}} - \bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{k}}, \bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = \bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{k}}$ となるので，この修正応力は古典塑性構成式の移動硬化モデルにおける修正応力と一致する．中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ を参照する下負荷面関数 $\bar{f}_{\mathrm{sub}}$ は次式で表される．

$$\bar{f}_{\mathrm{sub}}(\bar{\boldsymbol{M}}, \bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{k}}, \bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{c}}, R, q) = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{dev}}_{\mathrm{mod}}\| - Rq = 0 \tag{4}$$

Key Words:　拡張下負荷面モデル，有限変形理論，乗算分解，変形勾配テンソル，超弾性，リターンマッピング
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 数理システム設計学研究室, Phone: 022-795-7420, Fax: 022-795-7418

正規降伏比が $R=1$ のとき正規降伏面と下負荷面は一致する．すなわち $\bar{f}_{\mathrm{yld}}=\bar{f}_{\mathrm{sub}}$ となる．

(4)　塑性発展則

中間配置 $\bar{\mathcal{K}}$ を参照した関連流動則を塑性速度勾配 $\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}} := \dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}-1}$ について以下のように定義する．ここでは $\|\bar{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{sub}}\|=1$ となるように正規化している．

$$\bar{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{p}}=\dot{\lambda}\bar{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{sub}},\quad \bar{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{sub}}\equiv\frac{\partial\bar{f}_{\mathrm{sub}}}{\partial\bar{\boldsymbol{M}}}\Bigg/\left\|\frac{\partial\bar{f}_{\mathrm{sub}}}{\partial\bar{\boldsymbol{M}}}\right\|=\frac{\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{dev}}_{\mathrm{mod}}}{\|\bar{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{dev}}_{\mathrm{mod}}\|} \tag{5}$$

$\dot{\lambda}\geq 0$ は塑性乗数である．その他の塑性内部状態変数の発展則は紙面の都合上割愛する．

下負荷面モデルにおける正規降伏比 R は塑性ひずみの進行に伴い増加し，$R=1$（正規降伏状態）へと近づく．したがって，正規降伏比 R の発展則は以下のように定義する．

$$\dot{R}=\dot{\lambda}U(R),\quad U(R)=u\cot\left(\frac{\pi}{2}\frac{\langle R-R_{\mathrm{e}}\rangle}{1-R_{\mathrm{e}}}\right) \tag{6}$$

$U(R)$ は正規降伏比 R の発展の仕方を規定する関数であり，$\langle\bullet\rangle$ は Macaulay の括弧である．$u\ (>0)$ は R の発展の程度を規定する材料定数，$R_{\mathrm{e}}\ (0\leq R_{\mathrm{e}}<1)$ は純粋弾性域比を表す材料定数である．

拡張下負荷面モデルでは $U(R)$ に関して寄与する変数として正規降伏比 R のほかに，応力, 背応力，等方硬化の応力変数，弾性核を加えて拡張することにより，繰返し負荷挙動の性質をより正確に表すことができる．

この概念を有限変形理論の枠組みへと拡張させる際に，本論文では以下のことを考慮する．正規降伏比 R は塑性内部状態変数ではない．したがって，正規降伏比 R の発展則をどの配置で定義するかが問題となるが，ここでは基準配置 $\mathcal{K}_0$ を参照する形式とする．基準配置 $\mathcal{K}_0$ は現配置 $\mathcal{K}$ のように剛体回転の影響を受けることはないため，この定式化は物質客観性の面からも合理的である．その具体形は以下の通りである．

$$\dot{R}=\dot{\lambda}U(\boldsymbol{M},\boldsymbol{M}^{\mathrm{k}},\boldsymbol{M}^{\mathrm{c}},R,q), \tag{7}$$

$$U=u_0\exp[u_{\mathrm{c}}R_{\mathrm{c}}(\mathcal{N}_{\mathrm{sub}}:\mathcal{N}_{\mathrm{core}})]\cot\left(\frac{\pi}{2}\frac{\langle R-R_{\mathrm{e}}\rangle}{1-R_{\mathrm{e}}}\right), \tag{8}$$

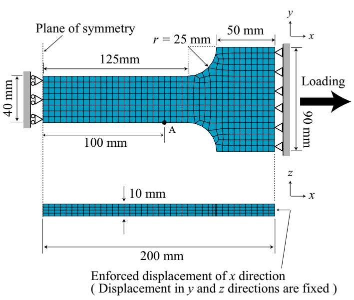
$$\mathcal{N}_{\mathrm{sub}}:\mathcal{N}_{\mathrm{core}}=\left(\frac{\partial f_{\mathrm{sub}}}{\partial\boldsymbol{M}}\Bigg/\left\|\frac{\partial f_{\mathrm{sub}}}{\partial\boldsymbol{M}}\right\|\right):\left(\frac{\partial f_{\mathrm{core}}}{\partial\boldsymbol{M}^{\mathrm{c}}}\Bigg/\left\|\frac{\partial f_{\mathrm{core}}}{\partial\boldsymbol{M}^{\mathrm{c}}}\right\|\right) \tag{9}$$

ここで，$u_0\ (>0)$，$u_{\mathrm{c}}\ (\geq 0)$ は下負荷面の発展係数である．また，$\mathcal{N}_{\mathrm{sub}}, \mathcal{N}_{\mathrm{core}}$ は基準配置 $\mathcal{K}_0$ における下負荷面 f_{sub} と弾性核面 f_{core} の単位外向き法線である．

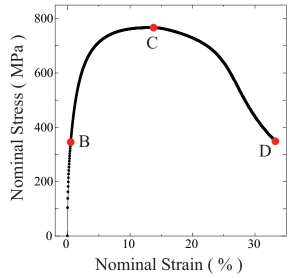
3.　数値解析例

本論文で提案した構成モデルを用いて金属材料の引張試験を模した有限要素シミュレーションを示す．解析モデルは JIS 規格に基づく一般的な引張試験片の寸法を設定し，試験片の対称性を考慮し，図 3 に示すように半領域モデルを用いる．材料定数は材料定数は SS400 を想定した値を用いた．有限要素は六面体 2 次要素（HEXA20, $2\times2\times2$ 点の低減積分）で要素数 1720，節点数 8935 で，拘束条件，載荷方向は同図中に記している．

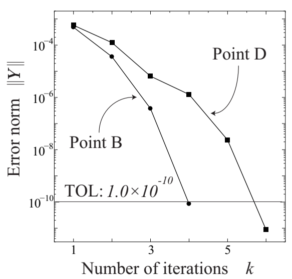
解析結果を図 4 から図 8 に示す．図 4 において図 3 の原標点 A の公称ひずみが約 14 %付近から荷重が低下し始め，試験片中央部周辺に変形が集中し，ネッキング現象が起こる．その後さらに引張変形を増加させ続けると，図 3 の左端面のくびれが大きくなるということが図 7，図 8 から確認できる．また，図 4 における点 B のように荷重が上昇する領域や，点 D のようにネッキングが生じて変形が集中したのち荷重が低下する領域においても Newton–Raphson 法本来の二次収束を示していることが図 5 から確認できる．さらに，変形の局所化が急速に進展する荷重極大点付近における収束計算が困難になりがちな領域においても，Newton–Raphson 法による求解の状況は概ね良好であることも図 6 から確認できる．以上より，本論文で提案したリターンマッピングによる完全陰的応力更新法は構造変形解析においても適用性があり，変形の局所化を伴うような場合でもロバスト性を有することが確認出来た．



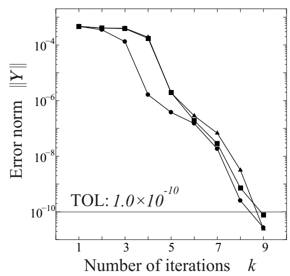
図–3　解析モデル



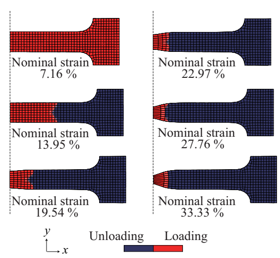
図–4　公称応力–公称ひずみ関係



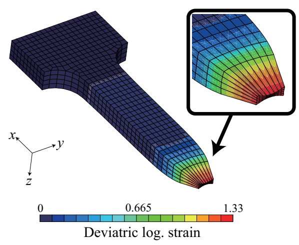
図–5　点 B, D における大域的な解の収束状況



図–6　荷重極大点（点 C）付近における大域的な解の収束状況



図–7　引張変形過程での負荷・除荷領域の推移



図–8　最終変形状態における偏差対数ひずみのコンター図

参考文献

1) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 25, pp. 917–945, 1989.
2) 井口拓哉，山川優樹，池田清宏: 微小変形理論と超弾性構成則に基づく拡張下負荷面モデルの再定式化とリターンマッピング法の開発，日本機械学会論文集，Vol. 82, No. 841, DOI:10.1299/transjsme.16-00197, 2016.