均質化法によりせん断遅れを考慮した一般化梁とその有限要素の構築

東北大学大学院工学研究科　○学生会員　西井大樹
東北大学大学院工学研究科　正会員　斉木　功
東北大学大学院工学研究科　正会員　岩熊哲夫

1.　はじめに

せん断遅れの解析は，数値的手法以外ではReissner[1]によって提案された解析的手法が現在も用いられている．この手法は箱型断面のような比較的単純な梁ではよい近似が可能であるが，任意断面に対して橋軸方向変位の分布を仮定することは容易ではない．これに対し，著者らは周期境界条件を用いた均質化梁理論[2]に基づいて梁の代表体積要素にせん断力を作用させ，代表体積要素の軸方向変位の水平方向分布を数値的に求め解析的手法に組み込む半解析的手法を提案した[3]．本報告では，この半解析的手法の精度改善を目的として軸方向変位の水平方向に加えて鉛直方向分布も考慮した解析の方法を提案する．

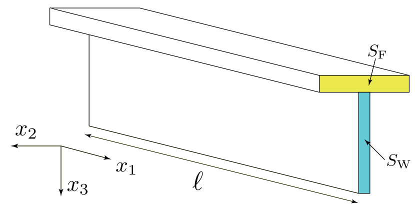
2.　せん断遅れの半解析手法

図–1 に示すような任意形状断面の梁を解析対象とし，橋軸方向を x_1，橋軸直角水平方向を x_2，鉛直方向を x_3 とする正規直交座標系を設定する．解析対象領域 V を，フランジ等のせん断遅れを考慮する領域 $V_{\mathrm{F}} := S_{\mathrm{F}} \times L$ とそれ以外のウェブ等の領域 $V_{\mathrm{W}} := S_{\mathrm{W}} \times L$ に区別する．ここで，L は橋軸方向の解析対象領域であり，$-\frac{\ell}{2} \leq x_1 \leq \frac{\ell}{2}$ とする．

せん断遅れによる橋軸方向の変位を，断面内の分布形状を表す関数 $f(x_2, x_3)$ とその大きさを表す橋軸方向の関数 $g(x_1)$ とに変数分離し，$f(x_2, x_3)\, g(x_1)$ と表すこととする．すると，V_{F} における橋軸方向の変位 u_1 は曲げによる変位とせん断遅れによる変位の和として

$$u_1 = x_3 \left(\tilde{\gamma} - \frac{\mathrm{d}u_3(x_1)}{\mathrm{d}x_1} \right) + f(x_2, x_3)\, g(x_1) \qquad (1)$$

と表すことができる．ここで，u_3 は梁のたわみ，$\tilde{\gamma}$ は梁の面外せん断ひずみを表す．なお，Reissner[1]や著者ら[3] (以後，筆者ら 2015 と呼ぶ) では f を x_2 のみの関数としている．本解析では式 (1) でせん断遅れの鉛直方向分布も考慮することにより，精度改善を目論んでいる．また，筆者ら 2015 においては梁の面外せん断ひずみを無視していたが，本研究ではこれについても考慮した．周期境界条件のもとで梁の代表体積要素にせん断変形を与えた有限要素解析を行い，算出された各節点の軸方向変位を最小値 0，最大値 1 になるように正規化して数値的に f を求める．



図–1　解析対象の梁とその断面

曲げを受ける梁の全ポテンシャルエネルギー Π を

$$\Pi := \Pi_{\mathrm{F}} + \Pi_{\mathrm{W}} + \Pi_{\mathrm{Q}} - \Pi_{\mathrm{ext}} \qquad (2)$$

と表す．ここに，Π_{F} は V_{F} のひずみエネルギー

$$\Pi_{\mathrm{F}} := \frac{1}{2} \int_{V_{\mathrm{F}}} \left(E\epsilon_1^2 + G\gamma_{12}^2 \right) \mathrm{d}V \qquad (3)$$

Π_{W} は V_{W} のひずみエネルギー

$$\Pi_{\mathrm{W}} := \frac{1}{2} (EI)_{\mathrm{W}} \int_L \left(\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}x_1} - \frac{\mathrm{d}^2 u_3}{\mathrm{d}{x_1}^2} \right)^2 \mathrm{d}x_1 \qquad (4)$$

Π_{Q} は梁の面外せん断ひずみエネルギー

$$\Pi_{\mathrm{Q}} := \frac{1}{2} \int_L G\kappa A \tilde{\gamma}^2 \,\mathrm{d}x_1 \qquad (5)$$

Π_{ext} は分布荷重の外力ポテンシャル

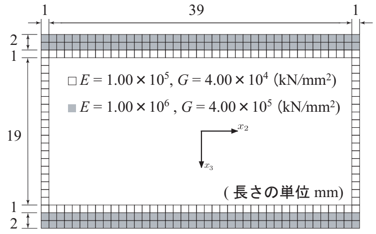
$$\Pi_{\mathrm{ext}} := \int_L q u_3 \,\mathrm{d}x_1 \qquad (6)$$

である．ここで，Young 率を E，せん断弾性係数を G，S_{W} の曲げ剛性を $(EI)_{\mathrm{W}}$，単位長さあたりの鉛直外力を q，軸ひずみを ϵ_1，x_1–x_2 面内せん断ひずみを γ_{12} とした．

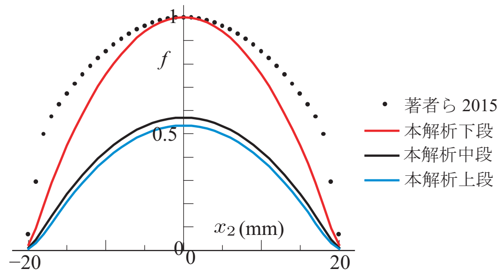
以上を用いてフランジが面内せん断変形する梁理論を定式化すると，曲げモーメントを M としたとき，全ポテンシャルエネルギー Π の停留条件から，u_3 と g と $\tilde{\gamma}$ に関する微分方程式

$$-(EI) \left(\frac{\mathrm{d}^3 \tilde{\gamma}}{\mathrm{d}{x_1}^3} - \frac{\mathrm{d}^4 u_3}{\mathrm{d}{x_1}^4} \right) - R_1 \frac{\mathrm{d}^3 g}{\mathrm{d}{x_1}^3} - q = 0 \qquad (7)$$

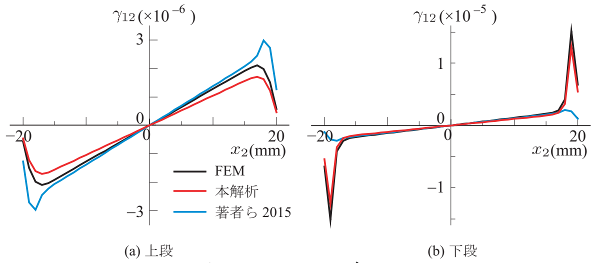
Key Words: 周期境界条件，せん断遅れ，均質化梁理論，有限要素解析
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06



図–2　非均質な厚いフランジを有する箱断面



図–3　せん断遅れによる変位分布 $f(x_2, x_3)$



図–4　上フランジのせん断ひずみ $(x_1 = -100\ \mathrm{mm})$

$$
-R_1\left(\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}x_1{}^2}-\frac{\mathrm{d}^3u_3}{\mathrm{d}x_1{}^3}\right)-R_2\,\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}x_1{}^2}+R_3g=0 \tag{8}
$$

$$
G\kappa A\tilde{\gamma}-(EI)\left(\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}x_1{}^2}-\frac{\mathrm{d}^3u_3}{\mathrm{d}x_1{}^3}\right)-R_1\,\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}x_1{}^2}=0 \tag{9}
$$

を得る．ここで，(EI) は全断面の曲げ剛性であり，

$$
R_1:=\int_{S_\mathrm{F}}Ex_3f\,\mathrm{d}S,\quad R_2:=\int_{S_\mathrm{F}}Ef^2\,\mathrm{d}S
$$

$$
R_3:=\int_{S_\mathrm{F}}G\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_2}\right)^2\mathrm{d}S
$$

と定義した．数値的に得られた $f(x_2, x_3)$ から Gauss 積分によって R_1, R_2, R_3 を求め，微分方程式を解く．

3.　提案手法の精度検証

図–2 に示す非均質なフランジを有する箱型断面梁のせん断遅れの解析を行った．支間 $\ell = 500\,\mathrm{mm}$ で単純支持され等分布荷重 $q = 1\,\mathrm{N/mm}$ を受けるものとする．参照解として，要素総数 143,000，節点総数 290,580 からなる有限要素モデルによる解を用いた．

この解析から得られた節点変位を元に数値的に求めたせん断遅れによる変位分布 $f(x_2, x_3)$ を**図–3** に示した．図中，上段・中段・下段はそれぞれ高さ方向に 3 分割したフランジの有限要素 3 要素の中心の位置である．ウェブとフランジの交点付近に生じている局所的な面内せん断ひずみのために，下段において f が大きくなり，上段・中段での f の最大値は下段のそれに比べてほぼ半分になっている．著者ら 2015 ではせん断遅れに起因する変位の高さ方向分布は考慮していないので，基本的にこのような梁のせん断遅れ解析は不可能であるが，ここでは比較のために曲げ剛性が等価となる同じ寸法の断面を有する均質な梁の中段の軸方向変位を用いて求めた $f(x_2)$ も掲載した．本研究では f の鉛直方向分布も考慮したため，せん断遅れの分布形状をより正確に再現することが可能となった．式 (7), (8), (9) の微分方程式を曲率 $\phi := \frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}x_1} - \frac{\mathrm{d}^2u_3}{\mathrm{d}x_1{}^2}$ で表し，

$$
n:=\frac{(EI)R_2}{(EI)R_2-(R_1)^2},\quad k^2:=n\,\frac{R_3}{R_2} \tag{10}
$$

と定義すると，単純支持の条件を用いて求めた曲率の解析解は

$$
\begin{aligned}
\phi = &-\frac{q(n-1)}{k^2(EI)}\left\{\frac{\cosh(kx_1)}{\cosh(k\ell/2)}-1\right\}\\
&+\frac{q\ell^2}{(EI)}\left\{\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\ell}\right)^2\right\}
\end{aligned} \tag{11}
$$

と求められる．

$x_1 = -100$ mm の断面での上フランジにおけるせん断ひずみ γ_{12} の分布を**図–4** にフランジ厚さ方向 2 箇所（上段と下段）について示した．どの図においても，橋軸直角方向の中央部ではせん断ひずみの分布がほぼ直線となっており，中央部ではせん断遅れの変位がよく知られた 2 次関数に近いことがわかる．有限要素解を見ると，上段ではウェブ付近でせん断ひずみが減少しているのに対し，下段ではウェブ付近においてせん断ひずみが局所的に大きくなっている．本解析は有限要素解析におけるこれらのせん断ひずみの分布をよく捉えている．

参考文献

1) Reissner, E.: Analysis of shear lag in box beam by principle of minimum potential energy, *Q. Appl. Math.*, 4(3), pp.268–278, 1946.

2) 斉木 功，鐙 一彰，山田 真幸，瀬戸川 敦，岩熊 哲夫：非均質 Timoshenko 梁の平均物性評価，応用力学論文集，土木学会， Vol.15, pp.161–169, 2012.

3) 斉木 功，西井 大樹，岩熊 哲夫：任意断面梁のせん断遅れ解析のための半解析的手法，土木学会論文集 A2, Vol.71, No.2, pp.I_11–I_18, 2015.