リターンマッピングによる拡張下負荷面モデルの応力計算における負荷判定法の改良

東北大学　学生会員　○福田達也
東北大学　学生会員　井口拓哉
東北大学　正会員　山川優樹
東北大学　フェロー会員　池田清宏

1. はじめに

Hashiguchi[1),2)] が開発した拡張下負荷面モデルは，材料の繰返し塑性挙動を精度よく表現可能な非古典塑性モデル[3)]のひとつとして知られている．井口ら[4)]は微小変形理論の枠組みで超弾性構成則を用いた拡張下負荷面モデルの再定式化を行い，弾性予測子／リターンマッピングによる応力計算アルゴリズムを開発した．しかし，繰返し変形解析において，ある特定の大きさのひずみ増分を1ステップで与えたとき，塑性負荷状態からひずみ方向の反転により弾性除荷を経て逆方向塑性負荷となる場合や，さらにその状態から順方向へひずみ方向が反転して再負荷となる場合に，応力計算の結果に著しい誤差が生じることがある問題点が確認された．これは，弾性除荷過程で下負荷面が現応力に追従しながら縮小して点に縮退した後，逆負荷ないしは再負荷の進行に伴い下負荷面が拡大するという下負荷面モデルに特有の挙動を計算で正確に追跡できていないことに起因する．そこで本研究では負荷判定法の改良と弾性除荷過程をサブステップにより取り扱うアルゴリズムを提案し，これにより1ステップで上述のようなひずみ増分を与えた場合にも高い精度で計算できることを示す．

2. 1ステップ解析時に生じる誤差の要因

従来の負荷判定法を示す．これは一般的な弾塑性モデルのリターンマッピングにおける負荷判定法[5)]を下負荷面関数 f_{sub} に適用したものである．

$$\begin{cases} f^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1} \leq 0 \text{ or } f^{(\mathrm{ela}),(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1} \leq 0 & \rightsquigarrow \text{弾性除荷・中立} \\ f^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1} > 0 \text{ and } f^{(\mathrm{ela}),(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1} > 0 & \rightsquigarrow \text{塑性負荷} \end{cases} \tag{1}$$

従来の負荷判定法では応力空間における時刻 t_n での下負荷面 ($f_{\mathrm{sub},n} = 0$) と，純粋弾性限界面 ($f^{(\mathrm{ela})}_{\mathrm{sub},n} := f_{\mathrm{sub},n}|_{R=R_{\mathrm{e}}} = 0$) を考え，これら2つの面のいずれかの内部領域に弾性試行応力がある場合を弾性とし，両方の面の外部領域にある場合を塑性と判定していた．

しかし，拡張下負荷面モデルでは弾性除荷過程にて下負荷面が点に縮退したのち拡大し，現応力点が純粋弾性限界面まで達すると塑性負荷が開始される．つまり，時刻 t_n における下負荷面の内部に弾性試行応力がある場合でも，本来の応答は塑性負荷である場合が考えられる．しかし式(1)の負荷判定法ではこれを弾性除荷と判定してしまう．これが前章で言及した誤差の要因である．したがって，増分ステップ内に本来ならば弾性除荷と塑性負荷過程が含まれる場合においても，正確に塑性負荷／弾性除荷の判定ができるように，負荷判定法を改良する必要がある．

3. 負荷判定法の改良

上述のように，1ステップでひずみ増分を与えた際に，増分ステップ内に本来含まれる弾性除荷と塑性負荷による下負荷面の縮小と拡大のプロセスを正しく追跡できないという問題があることが確認された．

ここでは，このような場合でも正確な負荷判定ができるように，弾性試行応力の応力空間における位置に基づいて判定する場合分けについて述べる．ここでは簡単のため，移動硬化が無いものとし，また，純粋弾性域比 $R_{\mathrm{e}} = 0$ として純粋弾性領域が無い下負荷面モデルの単軸挙動を考える．

(1) 従来の負荷判定により弾性除荷と判定されたとき

応力諸量は構成則により変形諸量と一対一に関係付けられるから，応力空間における応力諸量の遷移には一種の規則性が見いだせる．その一つとして，下負荷面が点に縮退する時点(この状態から後続の変形に対して塑性負荷が始まる)の前後では，現応力点における下負荷面の単位外向き法線 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{sub}}$ と，弾性核面の単位外向き法線 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{core}}$ のスカラー積 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{sub}} : \boldsymbol{n}_{\mathrm{core}}$ の正負が変化する．したがって，$\boldsymbol{n}_{\mathrm{sub},n} : \boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n}$ と弾性試行状態における $\boldsymbol{n}^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1} : \boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n}$ の正負が異なる場合は，時間区間 $[t_n, t_{n+1}]$ における過程で塑性負荷となっている可能性がある．そこで，$\boldsymbol{n}_{\mathrm{sub},n} : \boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n} < 0$ の場合および，$\boldsymbol{n}_{\mathrm{sub},n} : \boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n} \geq 0$ の場合で弾性試行状態を考え応力空間における応力諸量の位置関係を整理し，それぞれ図1(a)，(b)に示す．ここで，従来の負荷判定法で弾性と判定されている場合を想定しているので，弾性試行応力は前ステップの下負荷面の内部領域にあることに注意する．

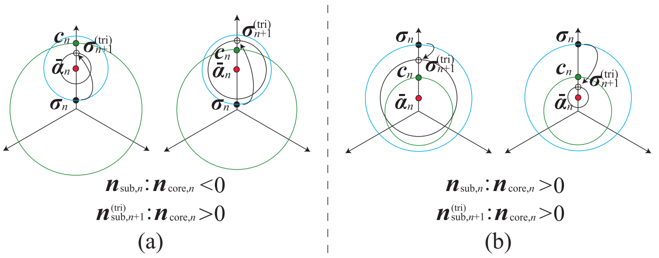
図1(a)の左の弾性試行状態は試行応力が弾性核に近づく過程にあるから弾性除荷過程として矛盾はない．右は試行応力が弾性核を越えた位置にあるから塑性負荷過程と判定すべきだとわかる．しかし，両者ともに $\boldsymbol{n}_{\mathrm{sub},n} : \boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n} < 0$ かつ $\boldsymbol{n}^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1} : \boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n} > 0$ であり，このスカラー積の正負では弾性除荷／塑性負荷の正確な判定は不可能である．ここで，弾性核面と試行応力の位置関係に注目すると，左図では試行応力が時刻 t_n における弾性核面の内部にあり，右図では外部にある．このことから試行応力が弾性核面の内部／外部にあることを判定する関数として，$g^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{core},n+1}$ を定義し(具体形は省略)，先に挙げた2つのスカラー積の正負と $g^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{core},n+1}$ の正負で弾性除荷／塑性負荷を判定できると考えられる．

$$\begin{cases} g^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{core},n+1} \geq 0 & \rightsquigarrow \text{試行応力は弾性核面の外部} \\ g^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{core},n+1} < 0 & \rightsquigarrow \text{試行応力は弾性核面の内部} \end{cases} \tag{2}$$

Key Words: 弾塑性，構成式，拡張下負荷面モデル，リターンマッピングアルゴリズム，負荷基準
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, Phone: 022-795-7420, Fax: 022-795-7418, E-mail: tatsuya.fukuda.s5@dc.tohoku.ac.jp

図 1(b) からも，左図の弾性除荷過程と右図の塑性負荷過程を判定する条件として，図 1(a) のときと同様に $g^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{core},n+1}$ を用いることが合理的だといえる．

以上に述べたように $\boldsymbol{n}_{\mathrm{sub},n}:\boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n}$，$\boldsymbol{n}^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1}:\boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n}$，$g^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{core},n+1}$ それぞれの正負で 8 つの場合に分類し (図 2)，弾性除荷／塑性負荷の判定条件とした．



図–1 弾性試行状態

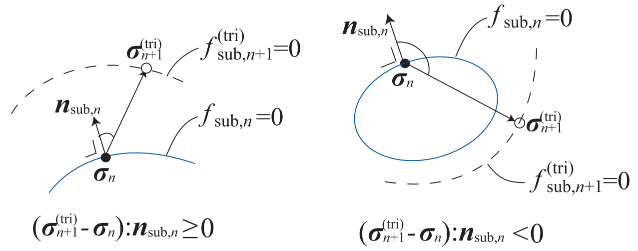
$\boldsymbol{n}_{\mathrm{sub},n}:\boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n}\geq 0$
- A) $\boldsymbol{n}^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1}:\boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n}\geq 0$ and $g^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{core},n+1}\geq 0$ elastic
- B) $\boldsymbol{n}^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1}:\boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n}\geq 0$ and $g^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{core},n+1}<0$ plastic
- C) $\boldsymbol{n}^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1}:\boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n}<0$ and $g^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{core},n+1}<0$ plastic
- D) $\boldsymbol{n}^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1}:\boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n}<0$ and $g^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{core},n+1}\geq 0$ plastic

$\boldsymbol{n}_{\mathrm{sub},n}:\boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n}<0$
- E) $\boldsymbol{n}^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1}:\boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n}\geq 0$ and $g^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{core},n+1}<0$ elastic
- F) $\boldsymbol{n}^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1}:\boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n}<0$ and $g^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{core},n+1}<0$ elastic
- G) $\boldsymbol{n}^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1}:\boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n}\geq 0$ and $g^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{core},n+1}\geq 0$ plastic
- H) $\boldsymbol{n}^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1}:\boldsymbol{n}_{\mathrm{core},n}<0$ and $g^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{core},n+1}\geq 0$ elastic

図–2 改良した負荷判定法

(2) 従来の負荷判定により塑性負荷と判定されたとき

従来の負荷判定により塑性負荷と判定された場合は，試行応力 $\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{tri})}_{n+1}$ は時刻 t_n での下負荷面の外部に位置している．このときに考えられる試行応力と下負荷面の位置関係を図 3 に示す．$(\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{tri})}_{n+1}-\boldsymbol{\sigma}_n):\boldsymbol{n}_{\mathrm{sub},n}\geq 0$ の場合は下負荷面が単に拡大する単調な塑性負荷過程であり，通常どおりリターンマッピングを行えばよい．一方，$(\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{tri})}_{n+1}-\boldsymbol{\sigma}_n):\boldsymbol{n}_{\mathrm{sub},n}<0$ の場合は増分ステップ内で弾性除荷により下負荷面が縮小してから塑性負荷の開始とともに拡大するプロセスを踏んでおり，そのプロセスを正確に辿る計算をする必要がある．



図–3 下負荷面と弾性試行応力の位置関係

4. サブステップアルゴリズム

増分ステップ内に弾性除荷過程を経て塑性負荷へと転ずる下負荷面の縮小・拡大プロセスが含まれる場合は，その増分ステップを弾性除荷過程と塑性負荷過程へ便宜的に分けるサブステップを設けることで，下負荷面の縮小・拡大を正確に追跡できる．弾性除荷過程でのひずみ増分 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}_{(1)}$ を次式で定義し，ひずみ増分を次のように分解する．

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}_{(1)}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} \tag{3}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}_{(1)}=\mathbf{c}^{\mathrm{e}-1}:(\boldsymbol{c}_n-\boldsymbol{\sigma}_n) \tag{4}$$

$$=\mathbf{c}^{\mathrm{e}-1}:\boldsymbol{c}_n-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}_n \tag{5}$$

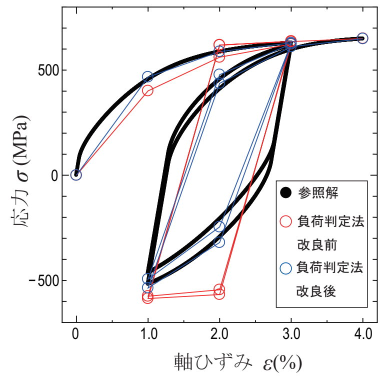
ここで，$\Delta\varepsilon_{(2)}$ は，ひずみ増分 $\Delta\varepsilon^{\mathrm{e}}_{(1)}$ による弾性除荷で下負荷面が点に縮退したのち，塑性負荷へ転じた際に生じるひずみ増分である．以上を踏まえ，サブステップアルゴリズムの概説は以下の通りである．

まず，ひずみ増分 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}_{(1)}$ による弾性除荷過程では，塑性内部状態変数は試行値をそのまま更新値として採用し，下負荷面が点に縮退することを表現するために正規降伏比を $R_{n+1,(1)}:=0$ と更新する．

次に，ひずみ増分 $\Delta\varepsilon_{(2)}$ による塑性負荷過程において，試行正規降伏比は先ほどの弾性除荷過程で更新した $R_{n+1,(1)}$ を採用する．すなわち，$R^{(\mathrm{tri})}_{n+1}:=R_{n+1,(1)}=0$ である．これを用いてリターンマッピング方程式を解けばよい．以上のようにサブステップアルゴリズムを踏むことで，増分ステップ内における弾性除荷過程から塑性負荷へと転じるプロセスを表現可能となる．

5. 数値解析例

ここでは一次元弾塑性モデルの計算例を示す．$\varepsilon=3.0\%$ まで軸ひずみを与えた後，$1.0\%\leq\varepsilon\leq 3.0\%$ の間で繰返し負荷を与えた場合における計算精度を検証する．この計算では第 2 サイクル以降の挙動も明確に表示するために，非線形等方硬化を導入した．参照解として，軸ひずみの増分を $\Delta\varepsilon=0.001\%$ とした計算結果を用いる．$\Delta\varepsilon=1.0\%$ とし，従来の負荷判定法を用いた計算結果と，改良した負荷判定法に加えて正規降伏比 R の解析積分を用いた計算結果を比較する．改良後は，とくに弾性除荷から逆方向の塑性負荷が開始した後の応力や，再負荷で弾性から塑性負荷がはじまったときの応力が，改良前よりも格段に精度良く計算できている．



図–4 繰返し負荷挙動

参考文献

1) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 25, pp. 917–945, 1989.
2) Hashiguchi, K.: *Elastoplasticity Theory*, Second Edition. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics 69, Springer, 2014.
3) Drucker, D.C.: Conventional and unconventional plastic response and representation, *Applied Mechanics Review (ASME)*, Vol. 41, pp. 151–167, 1988.
4) 井口拓哉, 山川優樹, 池田清宏: 微小変形理論と超弾性構成則に基づく拡張下負荷面モデルの再定式化とリターンマッピング法の開発. 日本機械学会論文集, Vol. 82, No. 841, p. 16-00197, 2016.
5) Simo, J.C., Hughes, T.J.R.: *Computational Inelasticity*. Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer, 1998.