

自己幾何構造に依存するトポロジー最適化の問題検証

○東北大学工学部	学生員	加藤 将貴
東北大学大学院工学研究科	学生員	西 紳之介
東北大学大学院工学研究科	正 員	加藤 準治
東北大学大学院工学研究科	正 員	京谷 孝史

1. はじめに

任意の外荷重に対して構造の変形量を最小にするトポロジー最適化問題は、SIMP 法¹⁾などの材料物性値を緩和する材料モデルを導入することで安定した解が得られる。しかし、自重や熱応力負荷など、自己の幾何構造に依存する荷重を考慮する場合には、数学的に安定した解を得ることは難しい。先行研究¹⁾では GCMMA²⁾ (Globally Convergent Method of Moving Asymptotes) という最適化アルゴリズムを導入してその問題解決を図ったがその性能検証は十分とは言えない。そこで、本研究では自己幾何構造に依存する荷重を考慮する場合の最適化問題を設定した上で、そこで生じる2つの問題点と改善策を示し、数値計算例を通じてそれらの効果ならびに GCMMA の性能検証を行う。

2. 自重に伴う変形量最小化問題の設定

本研究では、要素ごとの材料体積比を設計変数 s_i ($0 \leq s_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, N$) とし、目的関数 $f(s)$ はコンプライアンス最小化、不等式制約条件 $g(s)$ は材料体積制約とした。

$$\text{minimize} \quad f(s) = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\text{subject to} \quad g(s) = \int_{\Omega} s_i d\Omega - V_0 > 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}^b \quad (3)$$

$$0 \leq s_i \leq 1 \quad (4)$$

$$\text{with} \quad \mathbf{F}^b = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} d\Omega \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{F}^b$ は自重ベクトル、 $\mathbf{u}$ と $\mathbf{K}$ はそれぞれ節点変位ベクトルと剛性行列であり、 V_0 は所与の材料体積である。また、 $\mathbf{g}$ は重力加速度、 ρ は密度で、設計変数に線形依存する。

3. 感度の導出

本研究では、設計関数の勾配を活用した最適化アルゴリズムを用いるため、まずは式(1)で設定した目的関数に関して、設計変数で微分した感度を求める。

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = 2\mathbf{u}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_i} + \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_i} \mathbf{u} \quad (6)$$

ここで、 $\partial \mathbf{u} / \partial s_i$ において変位 $\mathbf{u}$ は構造解析により求まる変数であるため、この項は陰的な微分項である。そこで、式(3)を同様に設計変数で微分して以下を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_i} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_i} = \frac{\partial \mathbf{F}^b}{\partial s_i} \quad (7)$$

ここで、左辺第二項を式(6)に代入することで、陰的な微分項の存在しない次式で表せる。これは一般に随伴法と呼ばれている。

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = 2\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{F}^b}{\partial s_i} - \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_i} \mathbf{u} \quad (8)$$

4. 最適化計算例による性能検証

(1) 自重を考慮する場合の2つの問題点と改善策

1つ目の問題は、材料剛性を緩和する材料モデルの内挿関数の性質に起因する問題である。次節では、内挿関数として SIMP 法およびその改善策として適用した RAMP 法について述べる。2つ目の問題は、設計変数に対して目的関数が複雑な非凸性を有することで、これによって目的関数の導関数が non-monotonic な関数となり、数学的・工学的に有意な収束を得ることが難しくなることである。これについては、最適化アルゴリズムにその改善策を求めるしか方法はない。本研究では、一般に広く用いられている MMA (Method of Moving Asymptotes)²⁾ および文献¹⁾が推奨する GCMMA の両方を比較し、その性能検証を行った。

(2) SIMP 法および RAMP 法を用いた最適化計算例

内挿関数として SIMP 法を用い、 E を有効ヤング係数、 E_0 を実材料のヤング係数、 η をべき乗数とすると以下のように表せる。

$$E = (s_i)^\eta E_0 \quad (9)$$

しかし、図-1に示すように SIMP 法では設計変数が0に近づいていくと $\partial E / \partial s_i (\partial \mathbf{K} / \partial s_i)$ が急速に0に収束し、式(8)の右辺第二項が無視されてしまう。その結果、感度が正しく評価されず、正しい解が得られない。そのため本研究では、SIMP 法では設計変数を $0.2 \leq s_i \leq 1.0$ の条件で用いる。一方、この $s_i=0$ 近傍での不安定問題を解消するために本研究では RAMP 法を採用する。RAMP 法は q_E をべき乗とすると以下のように表せる。

$$E = \frac{s_i}{1 + q_E(1 - s_i)} E_0 \quad (10)$$

RAMP 法では設計変数が0に近づいても $\partial E / \partial s_i$ あるいは $(\partial \mathbf{K} / \partial s_i)$ が0にならないため設計変数に余分な制限を課することなく $0 \leq s_i \leq 1$ で計算できる。

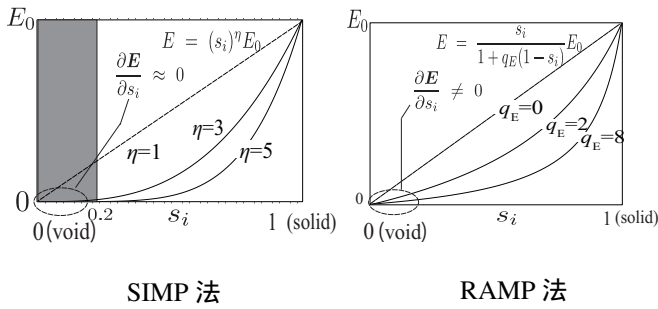


図-1 材料剛性の緩和法

図-2 と表 1 は SIMP 法で設計変数を $0.2 \leq s_i \leq 1.0$ とした場合の最適化結果である。

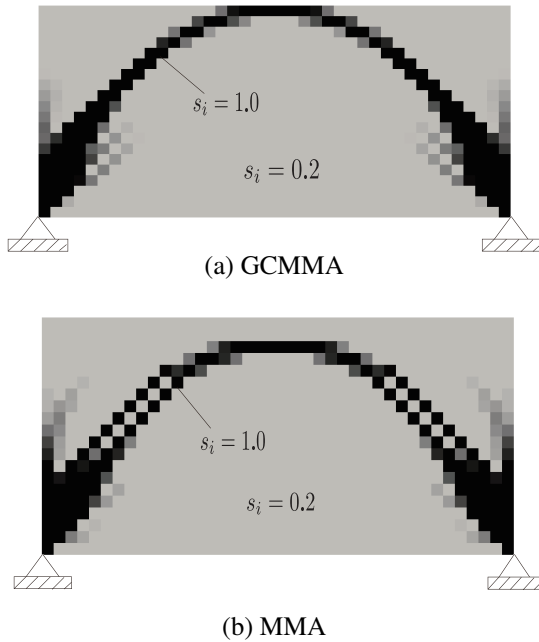


図-2 条件付き SIMP 法 ($0.2 \leq s_i \leq 1.0$) の場合の最適化結果

表-1 目的関数

	GCMMA	MMA
目的関数収束値	1.820×10^{-1}	1.801×10^{-1}

ここで、図-2(a) は文献¹⁾で掲示する結果と酷似していることから、GCMMA の実装に成功しているといえる。また、図-2(a) と図-2(b) を比較すると図-2(b) ではグレースケールが多く材料に隙間が生じるなど、GCMMA の方が有用性が高いことがわかる。しかし、表-1 より目的関数値に関しては MMA の方がよい収束値を示した。しかし、これは物理的な意味を保証しないがグレースケールが存在する中での値であり、力学的に正しい結果を示しているわけではなく参考にならない。

次に、RAMP 法で設計変数を $0 \leq s_i \leq 1$ とし、トポロジー最適化を図に示す。

図-3(a) と図-3(b) を比較すると図-3(b) には余分なところ

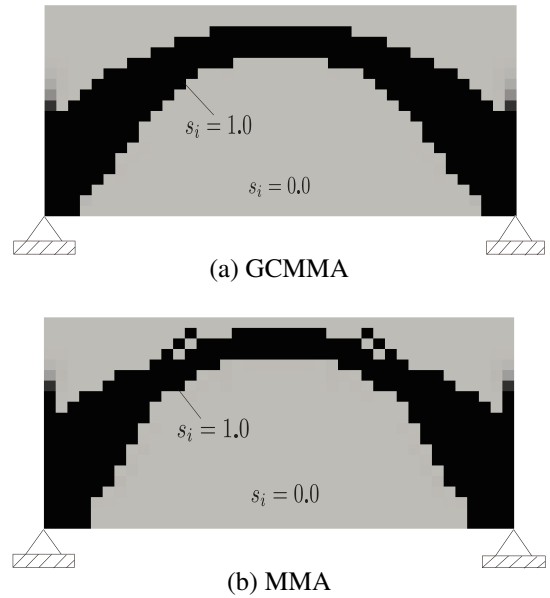


図-3 RAMP 法 ($0 \leq s_i \leq 1$) の場合の最適化結果

表-2 目的関数

	GCMMA	MMA
目的関数収束値	1.116×10^{-1}	1.122×10^{-1}

に材料が入っており、RAMP 法を用いた場合でも GCMMA の方が有用性が高いといえる。また、表-2 より RAMP 法を用いた場合には目的関数は GCMMA の方がよい収束性を示していることが分かった。

5. 結論

本研究では、自重に伴う構造の変形量最小化問題を設定し、2つの問題点とその改善策を提示し、併せて最適化アルゴリズムの性能検証を行った。その結果、RAMP 法を採用することでグレースケールを回避でき、さらに GCMMA を使用することで力学的に妥当な最適解が得られることがわかった。

参考文献

- 1) Bruyneel and Duysinx., “Note on topology optimization of continuum structures including”, *Struct. Multidisc. Optim.*, 2005, Vol. 29, pp 245-256.
- 2) K. Svanberg., “A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations”, *SIAM Journal of Optimization*, 2002, Vol. 12, pp 555-573
- 3) K. Svanberg., “The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, Vol. 24, pp 359-373