格子ボルツマン法の流れ解析におけるコヒーレント構造スマゴリンスキーモデルの導入

東北大学大学院 学生会員 ○佐藤 兼太
東北大学災害科学国際研究所 正 会 員 越村 俊一

1. はじめに

格子ボルツマン法(以下，LBM)における乱流の研究は古くから行われており，Hou *et al.*(1996)によってLBMにおける標準スマゴリンスキーモデルが定式化されて以来，Thürey(2007)によってLBMの自由表面流れモデルへの拡張が行われるなど，その知見の集積が進んでいる．Hou *et al.*のモデルは，全て局所的な格子点における諸量を用いて定式化されているため演算密度が高く，高い並列化性能を引き出すことが可能であるといった利点がある一方，標準スマゴリンスキーモデルに基づくモデルであるため，(1)壁境界付近での精度低下，(2)モデル係数の決定に経験則が要求される，といった問題がある．

本研究では上記の問題に対して，Kobayashi(2006)によって定式化されたコヒーレント構造スマゴリンスキーモデルをLBMの自由表面流れモデルへ拡張し，その自由表面流れ解析モデルへの適用について基礎的な検証を行う．そして，新たな3次元津波シミュレーション手法としてのLBMの可能性について検討する．

2. 格子ボルツマン法

(1) 格子ボルツマン法の概要

LBMは気体分子運動論をアナロジーとする新しい数値流体モデルである．連続体である流体を規則的な格子上を移動する仮想的な粒子の集合体と近似し，その仮想粒子の並進･衝突の時間発展から巨視的な流れ場の諸量を求める．マクロな連続体を仮定した支配方程式を離散的に解くFDMや，仮想粒子の運動をミクロスケールで追跡する粒子法とは異なり，LBMは仮想粒子の分布を解くことからメゾスケールの解析手法と位置づけられている．LBMの特徴として，完全に陽的な計算スキームであり，各格子点における計算が局所的であるためマルチコアCPUやGPUを用いた計算の高速化が期待されることや，圧力のポアソン方程式の収束計算が不要であることなどが挙げられる．以下ではThüreyとKobayashiに倣い，本解析の要点のみを述べる．詳細は参考文献を参照されたい．

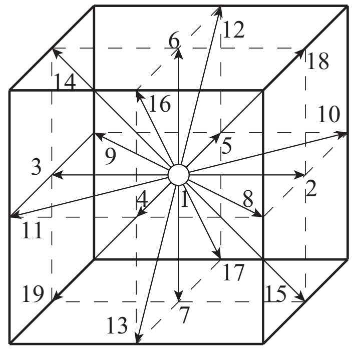

図-1 3次元19方向型格子形状

(2) 格子形状

本研究ではLBMの3次元格子形状として，**図**-1に示す3次元19方向型格子を用いる．仮想粒子の運動は**図**-1の1から19のリンク方向に制限される．

(3) 格子ボルツマン方程式

LBMは格子ボルツマン方程式より粒子分布関数f_iの時間発展を解く．本研究では格子ボルツマン方程式の衝突項に格子BGKモデルを採用した式(1)の格子BGK方程式を粒子分布関数f_iの支配方程式として用いる．

$$f_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_i\Delta t, t+\Delta t) = f_i(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{\tau}\left[f_i(\boldsymbol{x}, t) - f_i^{eq}(\rho, \boldsymbol{u})\right] \qquad (1)$$

式(1)のτは格子BGKモデルにおいて単一時間緩和係数と呼ばれ，式(1)で計算される流体の粘性を決定するパラメータである．またf_i^{eq}は局所平衡分布関数と呼ばれる関数であり，本研究ではHe *et al.*(1997)によって定式化された非圧縮流体に対する局所平衡分布関数f_i^{eq}を用いる．

$$f_i^{eq}(\rho, \boldsymbol{u}) = w_i\left[\rho + 3(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{u}) + \frac{9}{2}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{u})^2 - \frac{3}{2}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\right] \qquad (2)$$

ここで$\boldsymbol{e}_i$は，仮想粒子の各格子点における速度ベクトルである．なお，He *et al.*の定式化では流体の巨視的な諸量として密度ρおよび流速$\boldsymbol{u}$がそれぞれ粒子分布関数f_iの0次，1次モーメントで与えられる．

$$\rho = \sum_i f_i \qquad \boldsymbol{u} = \frac{1}{\rho_0}\sum_i \boldsymbol{e}_i f_i \qquad (3)$$

ただしρ_0は流体の定密度であり，本研究では$\rho_0 = 1$と設定した．

キーワード: 格子ボルツマン法，自由表面流れ，乱流，コヒーレント構造スマゴリンスキーモデル
連絡先: 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1 E302，TEL: 022-752-2082，FAX: 022-752-2083

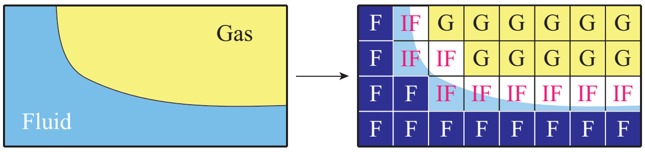

図-2　自由表面のモデル化

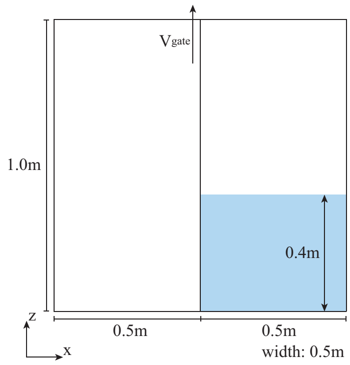

図-3　ゲート急開流れの実験模式図

(4) 自由表面流れモデル

本研究ではThüreyによるVOF法に基づく自由表面流れモデルを採用する．Thüreyのモデルは**図**-2に示すように，各セルにおける流体の充填率に応じてセルを空隙(G)，界面(IF)，流体(F)の3種類に分類し，界面セルの位置を逐次更新することによって自由表面を追跡する．

(5) コヒーレント構造スマゴリンスキーモデル

コヒーレント構造スマゴリンスキーモデルでは，速度歪みテンソルに加え渦度テンソルを計算する必要がある．速度歪みテンソルはHou *et al.*の定式化を用いて計算できる一方，渦度テンソル等の反対称テンソルはその定義式を離散化して計算する必要ある．そこで本研究では，テンソルの離散化をLee *et al.*(2005)のスキームを参考に，式(4)のように行い渦度テンソルを計算する．

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} = \sum_i w_i e_{i\alpha} \frac{\boldsymbol{u}_\beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_i\Delta t) - \boldsymbol{u}_\beta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_i\Delta t)}{2\Delta x} \qquad (4)$$

以上で得られた諸量から速度勾配テンソルの第2不変量を算出し，モデル係数を決定する．

3. 数値解析例

本研究では**図**-3のゲート急開流れの再現計算を通じてモデルの検証を行った．x = 0.75m，x = 0.25m地点における水位の時系列変化をそれぞれ**図**-4，**図**-5に示す．いずれの地点においてもコヒーレント構造スマゴリンスキーモデルによる計算結果(LBM-CSM)は，Hou *et al.*のモデルによる計算結果(LBM-OSM)と同様のトレンドを示し，さらにx = 0.75mでみられるLBM-OSMの波の遅れについてLBM-CSMでは改善されていることが確認できる．

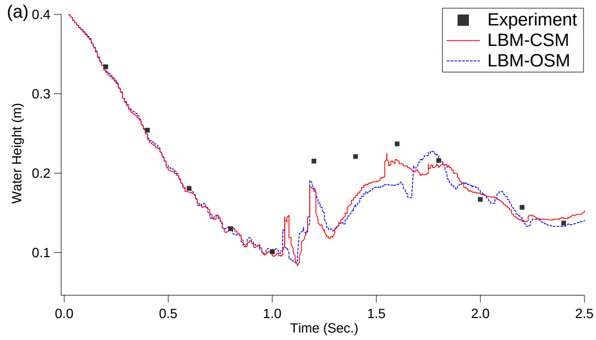

図-4　x = 0.75 m地点における時系列水位

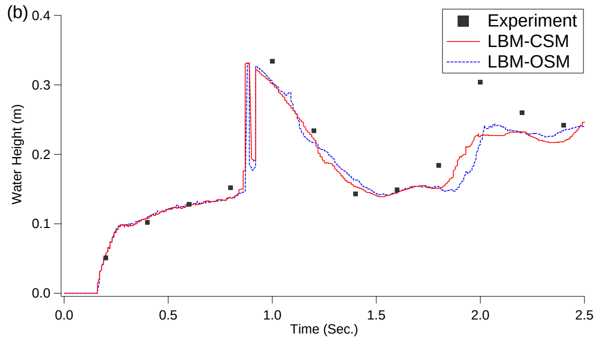

図-5　x = 0.25 m地点における時系列水位

4. 結論

本研究では，コヒーレント構造スマゴリンスキーモデルをLBMの自由表面流れに拡張し，検証を行った結果そのモデルがLBMの自由表面3次元解析においても有用であることが明らかとなった．今後は渦度テンソルを粒子分布関数の局所的な演算で計算できるように定式化を行い，計算の高精度化を進める予定である．

参　考　文　献

He, X. and Luo, L. S.: Lattice Boltzmann Model for Incompressible Navier-Stokes Equation, *J. Stat. Phys.*, Vol.88, pp.927-944, 1997.

Hou, S., Sterling, S. C. and Doolen, G. D.: A Lattice Boltzmann Subgrid Model for High Reynolds Number Flows, *Fields. Inst. Comm.*, Vol.6, pp.151-166, 1996.

Kobayashi, H.: Large Eddy Simulation of Magnetohydrodynamic Turbulent Channel Flows with Local Subgrid-Scale Model Based on Coherent Structures, *Phys. Fluids.*, Vol.18: 045107, pp.1-11, 2006.

Lee, T. and Lin, C. L.: A Stable Discretization of the Lattice Boltzmann Equation for Simulation of Incompressible Two-Phase Flows at High Density Ratio, *J. Comput. Phys.*, Vol.206, pp.16-47, 2005.

Thürey, N.: Physically Based Animation of Free Surface Flows with the Lattice Boltzmann Method, University of Erlangen-Nürnberg, Ph.D. thesis, 135p., 2007.