

格子ボルツマン法による自由表面流れ解析の安定性の検証

東北大学工学部

学生会員 ○荒明 裕貴

東北大学大学院工学研究科

学生会員 佐藤 兼太

東北大学災害科学国際研究所

正会員 越村 俊一

1. 序論

格子ボルツマン法(以下, LBM)は, 格子気体法などの気体分子運動論をアナロジーとする新しい数値流体解析手法である. 近年, Thürey(2007)によってLBMの自由表面流れモデルが定式化されて以来, 海岸工学分野においてもLBMの適用例が報告されるようになってきており, 知見の集積が急速に進んでいる. LBMは, (1)完全に陽的な計算スキームであるため並列計算に向く, (2)圧力のPoisson方程式の収束計算が不要であるため高効率な演算が可能である, といったメリットがあるため, 市街地スケールの大規模津波浸水シミュレーションへの応用が期待される数値流体モデルである. しかし一方, Thüreyの自由表面流れ解析モデルは計算が不安定になりやすいことが報告されている.

そこで本研究では上記の問題に対して, LBMの自由表面流れ解析で発生する負の粒子分布関数に着目し, Li *et al.*(2004)によって提案された, 局所的な単一緩和時間係数を導入することで計算の安定化を行い, Jánosi *et al.*(2004)のベンチマーク問題の解析を通じて, その検証を行う.

2. 格子ボルツマン法

(1) 格子ボルツマン法の概要

LBMは連続体である流体を規則的な格子上を移動する仮想的な粒子の集合体として近似し, その仮想粒子の時間発展を格子ボルツマン方程式により解くことで, 巨視的な流れ場の諸量を求める. 巨視的な連続体としての支配方程式を直接離散化して解く有限差分法などと異なり, LBMは仮想粒子の分布を解くという意味でメゾスケールの解析手法として位置づけられている. また格子ボルツマン方程式から得られる解は, Navier-Stokes方程式の解を2次のオーダーで満足することが数学的にも保証されており, 津波数値解析にも十分に応用が可能な手法といえる. 以下ではThüreyとLi *et al.*に倣い, 本解析の要点のみを述べる. 詳細は参考文献を参照されたい.

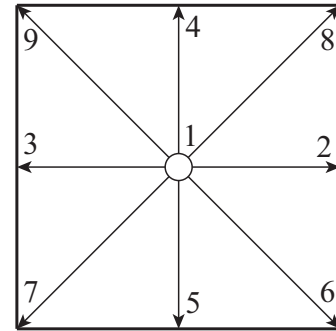


図-1 2次元9方向型格子形状

(2) 格子ボルツマン方程式

本研究ではLBMの断面2次元自由表面流れ解析を行う. LBMの2次元格子形状はいくつか存在するが, 本研究では図-1に示す2次元9方向型格子を用いる.

また先述の通り, LBMでは仮想粒子の分布は格子ボルツマン方程式に従う. 本研究では格子ボルツマン方程式の衝突項に格子BGKモデルを採用した式(1)の格子BGK方程式を粒子分布関数の支配方程式として用いる.

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\rho, \mathbf{u})] \quad (1)$$

ここで τ は単一時間緩和係数であり, 格子BGKモデルにおける粘性を表すパラメータである. また式(1)における f_i^{eq} は局所平衡分布関数と呼ばれる関数であり, 気体分子運動論の局所平衡解であるMaxwell-Boltzmann分布関数をTaylor展開し, 式(1)をChapman-Enskog展開した時にNavier-Stokes方程式に一致するように近似係数を決定することで与えられる. ただし, この過程で導出される局所平衡分布関数は擬似的な圧縮性を含むことが知られており, 自由表面流れ解析においてはこの圧縮性を無視することはできない. よって本研究では, He *et al.*(1997)により定式化された非圧縮流体に対する局所平衡分布関数を用いる.

$$f_i^{eq}(\rho, \mathbf{u}) = w_i \left[\rho + 3(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right] \quad (2)$$

ここで ρ は巨視的な流体の密度, $\mathbf{u}$ は巨視的な流速であり, それぞれ粒子分布関数 f_i の0次, 1次モーメントの粗視化によって与えられる.

キーワード: 格子ボルツマン法, VOF法, 粒子分布関数

連絡先: 仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1 E302, TEL: 022-752-2082, FAX: 022-752-2083

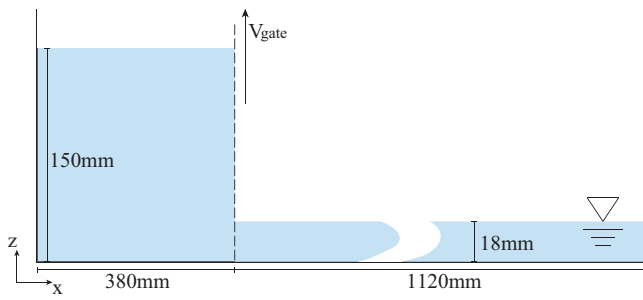


図-2 ゲート急開流れの実験模式図

(3) 自由表面探索法

Thüreyの自由表面流れモデルは流体の巨視的な変数として新たに各セルにおける流体の充填率を導入し、充填率の値に応じてセルを流体セル、界面セル、空隙セルの3種類に分類する。そして界面セルには特別な処理を施し、その位置を逐次発展させることで自由表面の位置を追跡する。

3. 自由表面流れ解析の計算安定化

先述のようにLBMの自由表面流れ解析では、その計算の過程で粒子分布関数 f_i が負の値となり、そのセルが原因で計算が不安定となる場合がある。この問題に対し本研究ではLi *et al.*の手法を自由表面流れ解析に適用し、局所的に単一緩和時間係数 τ を補正することで、粒子分布関数 f_i が負の値となることを防ぐ手法を自由表面流れモデルに拡張する。Li *et al.*の手法を式(3)に示す。この手法は粒子分布関数 f_i が負の値となった場合、式(3)を用いて単一緩和時間係数 τ を空間に対して局所的に補正する。

$$\tau'(x, t) = \max\left(\tau, 1 - \frac{f_i^{eq}(x, t)}{f_i(x, t)}\right) \forall i \quad (3)$$

ここで、 τ' は補正後の単一緩和時間係数である。このように補正した単一緩和時間係数 τ' を用いることで、衝突計算時に粒子分布関数 f_i が負の値となることを防ぐことが可能となる。また、本研究では乱流モデルとして、Hou *et al.*(1996)によるSGS渦粘性モデルを適用する。

4. 数値計算例

Jánosi *et al.*を参考に、図-2に示すゲート急開流れの再現計算を通じてモデルの検証を行う。表-1に本研究で設定した計算パラメータおよび粒子分布関数が負の値となった地点数を示す。ここからLi *et al.*の手法を適用することで、自由表面流れ解析において粒子分布関数が負の値となるのを防ぐことができたといえる。また、単一緩和時間係数 τ の時系列推移を図-3に示す。ここでスパイク状の振動がみられるのはSmagorinskyモデルを導入した影響と

表-1 計算パラメータおよび粒子分布関数が負となった地点数

$\Delta x(\text{mm})$	$\Delta t(10^{-4}\text{s})$	Without Eq.3	With Eq.3
1.00	1.00	12	4

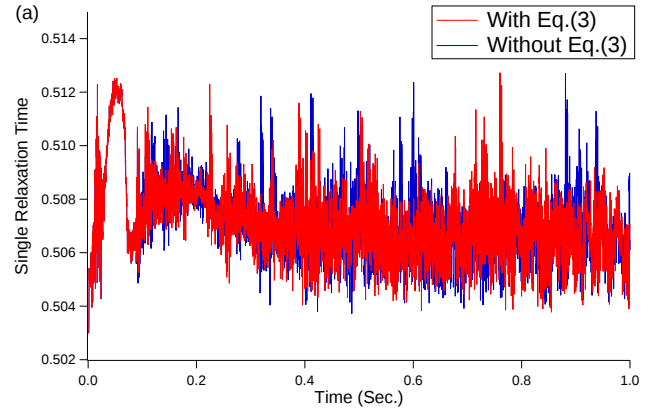


図-3 $(x, z) = (400, 10)$ (mm)地点における τ の時系列推移

考えられるが、両者とも概ね同様に τ が推移しており、Li *et al.*の手法を導入しても、従来通りに乱流モデルの計算が可能であることが本解析を通じて明らかとなった。

5. 結論

本研究ではLi *et al.*によって提案された局所的に単一緩和時間係数 τ を補正する手法を自由表面流れモデルに導入し、その計算安定性の検証を行った。今回の計算ケースではLi *et al.*の手法を適用しなくても安定した解析が可能であった。しかし、負の粒子分布関数の発生を防ぐことに成功したという点で、Li *et al.*の手法は自由表面流れ解析において有用な手法であるといえる。今後は実験結果との比較を行い、局所的な操作を行った際も物理的に整合する結果が得られるか検証を行う必要がある。

参 考 文 献

- He, X. and Luo, L. S.: Lattice Boltzmann Model for Incompressible Navier-Stokes Equation, *J. Stat. Phys.*, Vol.88, pp.927-944, 1997.
- Hou, S., Sterling, S. C. and Doolen, G. D.: A Lattice Boltzmann Subgrid Model for High Reynolds Number Flows, *Fields. Inst. Comm.*, Vol.6, pp.151-166, 1996.
- Jánosi, I. M., Jan, D., Szabó, G. and Tél, T.: Turbulent Drag Reduction in Dam-Break Flows, *Exp. Fluids.*, Vol.37, pp.219-229, 2004.
- Li, Y., Shock, R., Zhang, R. and Chen, H.: Numerical Study of Flow Past an Impulsively Started Cylinder by the Lattice-Boltzmann Method, *J. Fluid. Mech.*, Vol.519, pp.273-300, 2004.
- Thürey, N.: Physically Based Animation of Free Surface Flows with the Lattice Boltzmann Method, University of Erlangen-Nürnberg, Ph.D. thesis, 135p., 2007.