

複合材料弾塑性挙動の架空母材と逐次計算法を用いた森・田中平均手法の提案

東北大学大学院工学研究科 ○学生会員 鈴木貴大
東北大学大学院工学研究科 正会員 岩熊哲夫

1. まえがき

複合材料の有用な解析的平均挙動予測手法として、Eshelby の解¹⁾を利用した森・田中理論²⁾があり、過去の研究では森・田中理論に架空母材を導入する手法³⁾によって、弾性の範囲では既往の平均化手法の一般化に成功している。本研究では、この手法を弾塑性に拡張することを試みる。この時、塑性変形による異方性が生じるため、等方弾性で用いる Eshelby の解をそのまま用いることができず、母材と介在物の相互作用を厳密に考慮することは困難になる。そのために見かけ上の材料定数を近似する必要がある。多くの文献では弾塑性接線係数⁴⁾や割線係数を利用した手法がとられている。この時、架空母材の異方剛性を適切な等方弾性に近似することを提案する。この等方性近似を行うことによって近似的に Eshelby の解を用いることができ、弾塑性の範囲でも簡便に平均挙動予測ができる。

2. 弾塑性 2 相複合材料に対する増分型平均化

(1) 森・田中理論に基く弾塑性構成関係

3 相複合材料全体の平均応力増分および平均ひずみ増分は森・田中理論では母材と介在物の体積平均で

$$\dot{\bar{\sigma}} \equiv (1 - f_1 - f_2) \langle \dot{\sigma} \rangle_M + \sum_{i=1}^2 f_i \langle \dot{\sigma} \rangle_i \quad (1a)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} \equiv (1 - f_1 - f_2) \langle \dot{\epsilon} \rangle_M + \sum_{i=1}^2 f_i \langle \dot{\epsilon} \rangle_i \quad (1b)$$

と定義される。ここで下添え字 M は母材の諸量であることを、下添え字 i は各介在物の諸量であることを示し $i = 1, 2$ である。この時の平均増分応力ひずみ関係

$$\dot{\bar{\epsilon}} = D^{eq} \dot{\bar{\sigma}} \quad (2)$$

によって接線弾塑性係数コンプライアンス D^{eq} を定義する。弾性域では、 D^{eq} は弾性複合材の森・田中平均に一致する。

(2) 架空母材を用いた 2 相複合材の平均化

前節の 3 相複合材料の平均増分応力ひずみ関係に対して、母材の体積比率をゼロとして、この体積比率がゼロとなる母材を架空母材とみなしその材料定数を任

意に与えることで 2 相複合材の平均化を行う。この時、弾塑性の範囲での架空母材の選択方法の一つとして逐次計算法を提案する。逐次計算の 1 回目で $C_M^{(1)} = C_1$ として接線弾塑性係数コンプライアンス $D^{eq(1)}$ を求め、逐次計算の 2 回目として、今求められた $D^{eq(1)}$ を架空母材 $C_M^{(2)}$ として採用し接線弾塑性係数コンプライアンス $D^{eq(2)}$ を求める。このように架空母材の材料定数を随時、今求められた $D^{eq(k)}$ に更新しながら逐次計算を行うと、逐次計算により得られる予測値は何らかの値に収束する。等方弾性の範囲では逐次計算による予測値は Hill の self-consistent 解に一致する。

(3) $D^{eq(k)}$ の等方性近似

弾塑性体の場合の逐次計算に際して、Eshelby の解を用いるために塑性変形に伴う異方性を持つ $D^{eq(k)}$ をそのまま架空母材として採用せずに等方弾性に近似を行った $(D^{eq(k)})^{iso}$ を定義してから架空母材として採用した。異方剛性を等方弾性に近似を行うのには物理的な意義を見出しにくい、本手法ではこの近似による影響が逐次計算によって緩和されることを期待している。ここでは等方性近似の手法として二種類を提案する。

まず最小二乗法を用いた手法では、 C^{ani} の各成分と C^{iso} の各成分の差についての二乗和

$$\Pi \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \left\{ \left(\bar{C}_{ijkl}^{(k)} \right)^{ani} - \left(\bar{C}_{ijkl}^{(k)} \right)^{iso} \right\}^2 \quad (3)$$

を最小にするように体積弾性率 κ 、せん断弾性率 μ を決定する。 Π は体積弾性率 κ 、せん断弾性率 μ の二次形式になっているので以下の式を満たせばよい。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \kappa} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} = 0 \quad (4a, b)$$

次に材料定数テンソルの固有値を用いた手法では、文献⁵⁾の手法によって材料定数テンソルの固有値を導出し、材料定数テンソルの固有値 Λ は対応する固有テンソル E が体積変形を伴うかどうか、すなわち $\frac{1}{3} \text{tr}(E) \neq 0$ または $\frac{1}{3} \text{tr}(E) = 0$ となるかによって 2 種類に分類する。この時、2 種類に分類した C^{ani} と C^{iso} の固有値差を最小にするように体積弾性率 κ 、せん断弾性率 μ を決定する。2 種類に分類したそれぞれの固有値の平均を

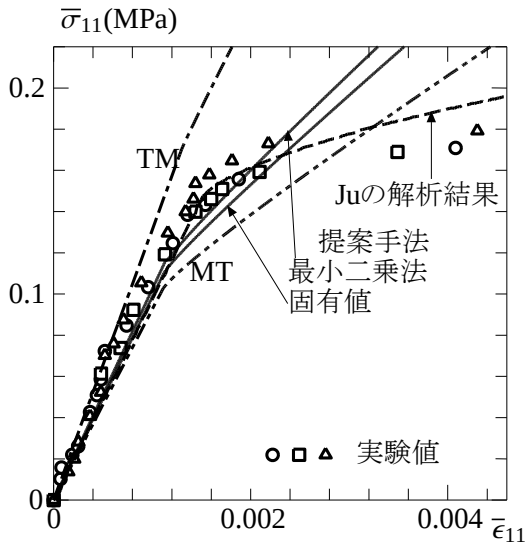


図-1 アルミニウム・ボロン複合材の平均応力ひずみ関係

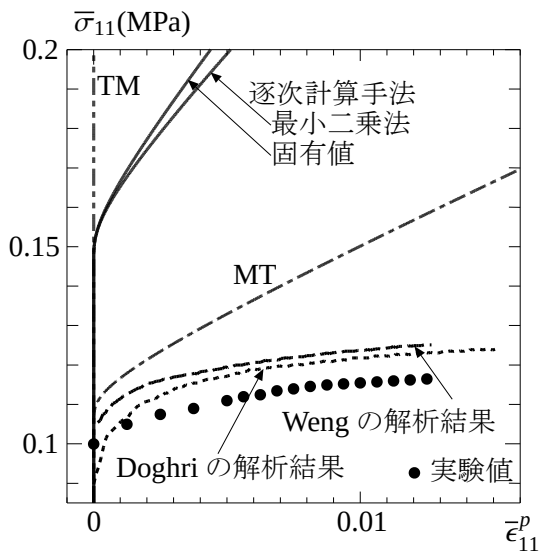


図-2 エポキシ・シリカ複合材の平均応力塑性ひずみ関係

$$\bar{\Lambda}_D^{\text{ani}} \equiv \frac{\sum \Lambda_D^{\text{ani}}}{n_D}, \quad \bar{\Lambda}_I^{\text{ani}} \equiv \frac{\sum \Lambda_I^{\text{ani}}}{n_I} \quad (5a, b)$$

と定義する. この時, $\bar{\Lambda}_D^{\text{ani}} = \bar{\Lambda}_D^{\text{iso}}$, $\bar{\Lambda}_I^{\text{ani}} = \bar{\Lambda}_I^{\text{iso}}$ を満たすように体積弾性率 κ , せん断弾性率 μ を決定する.

3. 計算例と実験値との比較

(1) アルミニウム・ボロン複合材の実験値との比較

アルミニウムをボロン繊維で補強した複合材料について. 母材であるアルミニウムヤング率を $E_1 = 55.85$ (MPa), ポアソン比を $\nu_1 = 0.32$, 繊維補強材であるボロンのヤング率を $E_2 = 379.23$, (MPa), ポアソン比を $\nu_2 = 0.2$ とする. また, アルミニウムのみが降伏すると考え, その塑性パラメータを $\sigma_1^Y = 79.29$ MPa, $h_1 = 827.4$ MPa, $n_1 = 0.6$ とした. この 2 相複合材料に対してボロンの体積比率 $f_2 = 0.34$ の時に x_1 方向に引張を与えた時の複合材の単軸応力ひずみ関係を図-1 に示す. 提案手法による予測値は良好に実験値を表せている.

(2) エポキシ・シリカ複合材の実験値との比較

エポキシをシリカ粒子で補強した複合材料について. 母材であるエポキシの $E_1 = 3.16$ (MPa), ポアソン比を $\nu_1 = 0.35$, その形状を球形とする. また, 繊維補強材であるボロンのヤング率を $E_2 = 73.1$, (MPa), ポアソン比を $\nu_2 = 0.18$, その形状を球状とする. この 2 材料の剛性比は $E_2/E_1 = 23.1$ となりアルミニウム・ボロン複合材に対して 3 倍以上の剛性比となっている. エポキシのみが降伏すると考え, その塑性パラメータを $\sigma_1^Y = 75.86$ MPa, $h_1 = 32.18$ MPa, $n_1 = 0.26$ とした. この 2 相複合材料に対して一軸引張試験の解析を行い, 実験値および他の解析結果と比較する. エポキシの体積比率 $f_2 = 0.35$ の時に x_1 方向に引張を与えた時の複合材の単軸応力塑性ひずみ関係を図-2 に示す. 提案手法による予測値は森・田中平均の中間値となっているが, 実験値や他の解析結果と大きく離れてしまっている. 森・田中平均の下限でさえ他の解析解と比べ非常に剛な予測値となっており, 提案手法は森・田中平均の中間値を予測するので, 総剛性比の大きな材料の平均弾塑性挙動を精度よく予測することは難しい.

4. 結論

架空母材を導入した森・田中平均を, 等方性近似と逐次計算を用いた手法により弾塑性体のような異方剛性の範囲に拡張する手法を提案し, 提案手法による予測値と実験値との比較を通してその特性を検討した. 提案手法による予測値は 2 相森・田中平均による上下界内に収まり, その予測値は剛性差が小さい複合材料については実験値をよく表している. しかし, 剛性差が大きい複合材料の実験値は 2 相森・田中平均による下限よりも剛性の小さいものとなり, 2 相森・田中平均による上下界内に存在する本手法による予測値では精度よく表すことができない.

参考文献

- 1) Eshelby, J. D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and average energy of materials with misfitting inclusions, *Act. Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973
- 2) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- 3) 小山茂, 岩熊哲夫, 岩崎智明, 小倉崇生, 三井康司: 複合材料と多結晶体の平均的性質, 土木学会論文集, No. 661/I-53, pp.265-272, 2000.
- 4) Hill, R.: Continuum micromechanics of elastoplastic polycrystals, *J. Mech Phys. Solids*, Vol.13, pp.89-101, 1965
- 5) Mehrabadi, Morteza M. and Stephen C. Cowin.: Eigentensors of linear anisotropic elastic materials, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol.43.1, pp.15-41, 1990.