

結合力モデルを用いた共回転定式化による大变位・大回転破壊解析手法

○東北大学工学部	学生員	鈴木 峻
東北大学災害科学国際研究所	正 員	寺田 賢二郎
法政大学デザイン工学部	正 員	竹内 則雄
東北大学災害科学国際研究所	正 員	森口 周二
東北大学大学院工学研究科	正 員	高瀬 慎介

1. はじめに

これまで土木構造物は、損傷を受けない、もしくは損傷が発生しても、構造物全体系の崩壊を生じさせないように設計されており、崩壊過程までを考えた構造物の設計の重要性はあまり認識されてこなかった。しかし、平成7年兵庫県南部地震や平成23年東北地方太平洋沖地震による津波などで、多くの土木構造物が壊滅的な機能不全に陥った。そこで、防災・減災上の観点から、設計外力を上回るような外力が発生した場合の、崩壊挙動を把握する重要性が認識されてきた。

既往の研究において、構造物の一部に微細なき裂が発生し、進展していく問題などに対して多くの成果¹⁾がある一方で、これらは微小変形を前提としているため、構造物が崩壊するときの大変位・大回転運動を解析することはできない。本研究では、微小変形理論に幾何学非線形性を考慮した Crisfield ら²⁾の共回転定式化に、結合力モデルを用いて、大变位・大回転破壊解析手法を提案する。

2. 結合力モデルを用いた共回転定式化

2.1 共回転有限要素法

共回転有限要素法は、物体の運動を剛体運動と連続体の変形に分離したものであり、Crisfield ら²⁾によって定式化されている。空間方向に離散化した物体を、大域座標と要素の中心のスピンを零にするような局所座標を用いて、要素の剛体運動と、純粋な変形を考えるものである。離散化した局所変位の増分 δd_ℓ が、離散化した大域変位の増分 δd_g と変換行列 T で表されるとき、線形化方程式は次式で与えられる。

$$K_{tg}\delta d_g = -(\mathbf{F}_g^{\text{int}} - \mathbf{F}_g^{\text{ext}}) \quad (1)$$

ここで、下付きの添え字 g は大域系の変数であり、 ℓ は局所系の変数を示す。 $\mathbf{F}_g^{\text{ext}}$ は大域外力ベクトルである。 K_{tg} は大域接線剛性行列、 $\mathbf{F}_g^{\text{int}}$ は大域内力ベクトルであり、それぞれ $T^T K_{t\ell} T + K_{t\sigma}$ 、 $T^T \mathbf{F}_\ell^{\text{int}}$ とする。 $K_{t\ell}$ 、 $\mathbf{F}_\ell^{\text{int}}$ は局所接線剛性行列、局所内力ベクトル、 $K_{t\sigma}$ は幾何剛性行列である。

2.2 結合力モデル

結合力モデルは、不連続面 Γ_D の相対変位ベクトル $\mathbf{u}^{[1]} - \mathbf{u}^{[2]}$ から求まる表面力ベクトル $\mathbf{t}(\mathbf{u}^{[1]} - \mathbf{u}^{[2]})$ を外力との関係として与える。ここで、上付きの添え字 [1], [2] は、不連続面を境界にもったそれぞれの物体領域を示す。結合力モデルを用いたつり合い方程式の弱形式は、次式で表される。

$$\int_{\Omega} \nabla \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma_D} (\delta \mathbf{u}^{[1]} - \delta \mathbf{u}^{[2]})^T \mathbf{t}(\mathbf{u}^{[1]} - \mathbf{u}^{[2]}) d\Gamma = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Omega \quad (2)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力、 Ω は物体領域、 Γ_t は Neumann 境界、 $\mathbf{b}$ は物体力ベクトル、 $\mathbf{t}$ は表面力ベクトルである。この弱形式を離散化し、線形化することによって、次の式を得る。

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{[1]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{[2]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{dis}}^{[1],[1]} & \mathbf{K}_{\text{dis}}^{[1],[2]} \\ \mathbf{K}_{\text{dis}}^{[2],[1]} & \mathbf{K}_{\text{dis}}^{[2],[2]} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{d}^{[1]} \\ \delta \mathbf{d}^{[2]} \end{Bmatrix} = - \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{dis}}^{\text{int},[1]} \\ \mathbf{F}_{\text{dis}}^{\text{int},[2]} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{dis}}^{\text{int},[1]} \\ \mathbf{F}_{\text{dis}}^{\text{int},[2]} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext},[1]} \\ \mathbf{F}_{\text{ext},[2]} \end{Bmatrix} \right) \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{K}^{[1]\text{or}[2]}$ 、 $\mathbf{F}_{\text{dis}}^{\text{int},[1]\text{or}[2]}$ は接線剛性行列、内力ベクトル、 $\mathbf{K}_{\text{dis}}^{[1],[2]}$ 、 $\mathbf{F}_{\text{dis}}^{\text{int},[1]\text{or}[2]}$ は結合力モデルによる接線剛性行列、内力ベクトルである。

2.3 結合力モデルを用いた共回転定式化

共回転有限要素法では、要素の運動を剛体運動と純粋な変形に分離する。一方、結合力モデルは不連続面の相対変位から表面力を与えるものである。したがって、結合力モデルを大域系での相対変位-表面力関係ととらえれば、そのまま共回転有限要素法を適用できる。具体的には式(4)で結合力モデルによる項を加えたように、式(1)にも結合力モデルによる項を加えることで次式を得る。

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tg}^{[1]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{tg}^{[2]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{dis}}^{[1],[1]} & \mathbf{K}_{\text{dis}}^{[1],[2]} \\ \mathbf{K}_{\text{dis}}^{[2],[1]} & \mathbf{K}_{\text{dis}}^{[2],[2]} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{d}_g^{[1]} \\ \delta \mathbf{d}_g^{[2]} \end{Bmatrix} = - \left(\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_g^{\text{int},[1]} \\ \mathbf{F}_g^{\text{int},[2]} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{dis}}^{\text{int},[1]} \\ \mathbf{F}_{\text{dis}}^{\text{int},[2]} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_g^{\text{ext},[1]} \\ \mathbf{F}_g^{\text{ext},[2]} \end{Bmatrix} \right) \quad (4)$$

3. 数値解析例

3.1 無筋コンクリートの破壊

コンクリートなどの準脆性材料を対象に解析を行う．以下の解析例においては，平面ひずみ状態を仮定し，定ひずみ三角形要素を用いる．ひび割れ界面のモデル化には，次式に示す Wells ら³⁾ が用いた表面力—開口変位関係を採用する．

$$t_n = f_t \exp\left(\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \quad (5)$$

$$t_s = d_{\kappa=0.0} \exp(h_s \kappa) \llbracket u \rrbracket_s \quad (6)$$

ここで， t_n ， t_s はひび割れ面の法線方向，接線方向の表面力， f_t は材料の引張強度， G_f は破壊エネルギー， κ は載荷履歴における最大開口変位， $\llbracket u \rrbracket_s$ は相対すべり変位， h_s は $\ln(d_{\kappa=1.0}/d_{\kappa=0.0})$ で与えられる変数である． $d_{\kappa=1.0}$ ， $d_{\kappa=0.0}$ はそれぞれ $\kappa = 1.0, 0.0$ のき裂せん断剛性である．

図-1 に示すような領域中央に潜在的なひび割れ面を有する柱に対し，境界条件として下端を拘束し，上端は水平方向の強制変位を与える．材料パラメータは同図の通りである．微小変形理論と本手法で解析を行い，それぞれの結果について考察する．

図-2-a は微小変形理論の解析，図-2-b は本手法により得られた変形図である．微小変形理論では柱が完全に折れず，剛体運動を適切に表現できないため，強制変位が大きくなるにつれて上端の面積が大きくなっている．さらに，微小変位理論では，ひび割れ面の相対すべり変位がほとんど評価されない．一方，本手法では柱が完全に折れ，強制変位が大きくなっても上端の形状は保たれている．幾何学的非線形性を考慮したことで，ひび割れ面の相対すべり変位が正しく評価され，柱の上側領域がせん断方向に大きく移動している．このように，本解析手法は大変位・大回転運動を伴う構造物の破壊挙動を適切に表現できることがわかる．

4. 終わりに

構造物の崩壊現象を再現するには，ひび割れの進展と構造物の大変位・大回転運動を併せた定式化が必要である．本研究では，大変位・大回転運動のための共回転有限要素法と，ひび割れ進展解析のための結合力モデルを組み合わせることにより，大変位・大回転破壊解析手法を開発した．そして，本手法によれば無筋コンクリート柱の数値解析例において，ひび割れを伴う構造物の大変位・大回転運動を適切に表現できることを例示した．

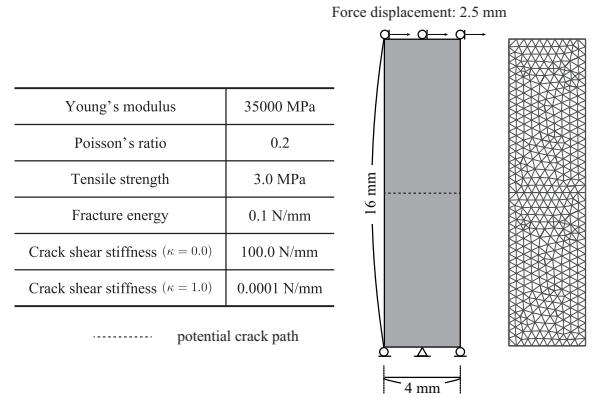


図-1 領域中央に潜在的なひび割れ面を有する柱のモデル

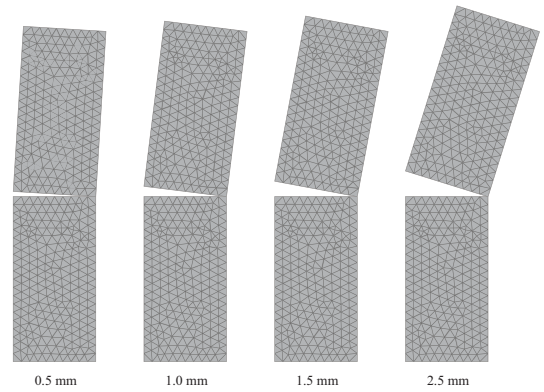


図-2-a 微小変形理論

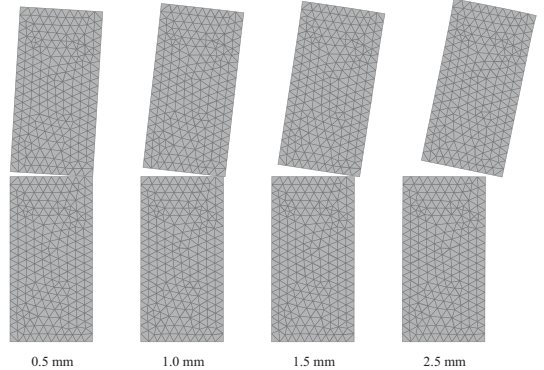


図-2-b 本手法

図-2 各理論での変形図

参考文献

- 1) Hillerborg, A. Modeer, M. and Petersson, P.E.: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cement and Concrete Research*, Vol.6, pp.773-782, 1976.
- 2) Crisfield, M. A. and Moita, G. F.: A co-rotational formulation for 2-D continua including incompatible modes, *Int. J. Numer Methods Engng*, Vol.39, pp.2619-2633, 1996.
- 3) Wells, G. N. and Sluys, L. J.: A new method for modelling cohesive cracks using finite elements, *Int. J. Numer Methods Engng*, Vol.50, pp.2667-2682, 2001.