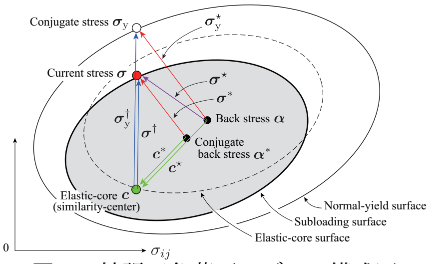
微小変形理論と超弾性構成則に基づく 拡張下負荷面モデルの定式化と繰返し負荷挙動予測

東北大学工学部　学生会員　○井口 拓哉
東北大学大学院工学研究科　正会員　山川 優樹
東北大学大学院工学研究科　フェロー会員　池田 清宏

1. はじめに

非古典塑性論に基づく弾塑性モデルの一種として，Hashiguchi[1),2)] は下負荷面モデルを提案した．下負荷面モデルは正規降伏面の内部に，それと相似で常に現応力点を通る下負荷面を仮定し，正規降伏面の内部でも塑性ひずみが発生し得るとするモデルである．本論文では，正規降伏面と下負荷面との相似の中心（以下，弾性核と呼ぶ）が塑性変形に伴って移動することにより繰返し負荷挙動を正確に表現し得る拡張下負荷面モデル[2)] を採用する．拡張下負荷面モデルの模式図を**図–1** に示す．

拡張下負荷面モデルに関する既往の研究の多くは速度形の亜弾性構成則をベースとし，また移動硬化の背応力や弾性核の発展則も速度形で規定する定式化がなされている．これを有限変形に拡張する際には客観応力速度を用いることとなる．しかし，客観応力速度の種類によってはせん断時の応力振動など明らかに不自然な挙動を示したり，弾性変形でのエネルギー保存性が保証されないなどの問題点が挙げられる．そこで本論文では，拡張下負荷面モデルを変形勾配テンソルの乗算分解に基づく有限変形理論の枠組みで再定式化するための前段階として，微小変形理論に基づき超弾性構成則を用いた拡張下負荷面モデルの定式化と弾性予測子／リターンマッピングによる応力計算法を開発し，数値実装を行った．



図–1　拡張下負荷面モデルの模式図

2. 拡張下負荷面モデルの定式化

三次元モデルについて述べる．ここでは等方線形弾性体の超弾性構成式を用いる．ひずみについては全ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ の弾性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ と塑性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ への加算分解と，非線形移動硬化を考慮したレオロジーモデルに準じて，背応力 $\boldsymbol{\alpha}$ と弾性核 $\boldsymbol{c}$ のそれぞれについて塑性ひずみのエネルギー貯留部分と消散部分への加算分解を導入する．

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{ks}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{kd}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{cs}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{cd}} \tag{1}$$

ここで，下添え字 ‘k’ は移動硬化，‘c’ は弾性核に関連することを意味し，‘s’ はエネルギー貯蓄，‘d’ はエネルギー消散に関連することを意味する．

また，降伏条件は金属一般を対象とした von Mises 型を採用した．下負荷面式 $f_{\mathrm{sub}} = 0$ は以下で定義する．

$$f_{\mathrm{sub}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, q, \boldsymbol{c}, R) = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}_{\mathrm{mod}}\| - Rq = 0 \tag{2}$$

q は等方硬化の応力変数を示す．また，$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{mod}}$ は拡張下負荷面モデルにおける修正応力であり，$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{mod}} := (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{c}) - R(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{c})$ と定義する．さらに上添え字 dev は偏差応力を示す．式 (2) において，正規降伏比 R を $R = 1$ とすると式 (2) は正規降伏面 $f_{\mathrm{yld}} = 0$ に一致する．さらにこのとき，$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{mod}} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}$ となり，古典塑性論の移動硬化モデルの修正応力に一致する．

塑性流動則は以下のように定義する．

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \dot{\lambda}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{p}} \tag{3}$$

ここで，$\dot{\lambda} \geq 0$ は塑性乗数である．ここでは関連流動則を用いることとし，塑性変形の進展方向を規定する $\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{p}}$ として現応力点における下負荷面の単位外向き法線 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{sub}}$ を用いる．

$$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{n}_{\mathrm{sub}}, \quad \boldsymbol{n}_{\mathrm{sub}} = \frac{\partial f_{\mathrm{sub}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big/ \left\| \frac{\partial f_{\mathrm{sub}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\| = \frac{\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}_{\mathrm{mod}}}{\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}_{\mathrm{mod}}\|} \tag{4}$$

正規降伏比 R の発展則は以下の通りである．

$$\dot{R} = U(R)\|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\| = \dot{\lambda}U(R) \tag{5}$$

ここで，$U(R)$ は正規降伏比 R の発展の仕方を規定する関数であり，変数として応力 $\boldsymbol{\sigma}$，背応力 $\boldsymbol{\alpha}$，等方硬化 q，弾性核応力 $\boldsymbol{c}$ を加えて拡張した式 (6) により繰返し負荷挙動の性質をより正確に表すことができる．

$$\begin{aligned} U &:= U(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, q, \boldsymbol{c}, R) \\ &= u_0 \exp[u_{\mathrm{c}} R_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{n}_{\mathrm{sub}} : \boldsymbol{n}_{\mathrm{core}})] \cot\left(\frac{\pi}{2}\frac{\langle R - R_{\mathrm{e}}\rangle}{1 - R_{\mathrm{e}}}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

$\langle\bullet\rangle$ は Macaulay の括弧，R_{c} は正規降伏面に対する弾性核面の比，R_{e} は正規降伏面に対する純粋弾性域比，$u_0(>0)$ と $u_{\mathrm{c}}(\geq 0)$ は下負荷面の発展係数，$\boldsymbol{n}_{\mathrm{core}}$ は弾性核面の単位外向き法線である．その他の内部変数の発展則は省略する．

3. リターンマッピングアルゴリズム

本論文ではリターンマッピングによる応力の引き戻し操作を拡張下負荷面モデルに拡張させる．

ある時間区間 $[t_n, t_{n+1}]$ について材料応答が弾性であると仮定し，新たな塑性変形が発展しないものとして弾性試行状態を計算する．弾性試行状態における応力・ひずみ・内部変数の諸量をまとめて弾性予測子と呼ぶ．まず，弾性試行

Key Words: 微小変形理論，超弾性構成則，拡張下負荷面モデル，弾性核，弾性予測子，リターンマッピング
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 数理システム設計学研究室, Phone: 022-795-7420, Fax: 022-795-7418

状態における下負荷面関数 $f^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1}$ と下負荷面関数の正規降伏比 R を材料定数 R_{e} で置き換えた関数 $f^{(\mathrm{ela})}_{\mathrm{sub},n+1}$ を考える．そして次式を用いて負荷判定を行う．上添え字 (tri) は弾性予測子であることを示す．

$$\begin{cases} f^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1} \leq 0 \ \text{or} \ f^{(\mathrm{ela})}_{\mathrm{sub},n+1} \leq 0 & \rightsquigarrow \text{弾性除荷・中立} \\ f^{(\mathrm{tri})}_{\mathrm{sub},n+1} > 0 \ \text{and} \ f^{(\mathrm{ela})}_{\mathrm{sub},n+1} > 0 & \rightsquigarrow \text{塑性負荷} \end{cases} \tag{7}$$

式（7）で弾性除荷・中立と判定された場合は，試行応力をそのまま更新値として採用する．

塑性負荷と判定されたときは，塑性発展式を時間区間で積分して得られた式と式 (2) の下負荷面式を連立させてリターンマッピングを行う．解くべき連立方程式は式（8）で示され，未知数 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{kd},n+1}, \xi_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{cd},n+1}, R_{n+1}, \Delta\lambda$ について非線形であるため，Newton-Raphson 法を用いて解く．ξ は等方硬化に関するひずみ変数を示す．

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}_1 := \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p},(\mathrm{tri})}_{n+1} - \Delta\lambda \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{p}}_{n+1} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Y}_2 := \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{kd},n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p},(\mathrm{tri})}_{\mathrm{kd},n+1} - \Delta\lambda \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{k},n+1} = \boldsymbol{0} \\ Y_3 := \xi_{n+1} - \xi^{(\mathrm{tri})}_{n+1} - \Delta\lambda \gamma^{\mathrm{p}}_{\mathrm{i},n+1} = 0 \\ \boldsymbol{Y}_4 := \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{cd},n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p},(\mathrm{tri})}_{\mathrm{cd},n+1} - \Delta\lambda \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{c},n+1} = \boldsymbol{0} \\ Y_5 := R_{n+1} - R^{(\mathrm{tri})}_{n+1} - \Delta\lambda U_{n+1} = 0 \\ Y_6 := \sqrt{\tfrac{3}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{dev}}_{\mathrm{mod},n+1}\| - R_{n+1} q_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

残差ベクトルを $\boldsymbol{Y}$，未知量ベクトルを $\boldsymbol{X}$ ($\boldsymbol{X} := [\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{kd},n+1}, \xi_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{cd},n+1}, R_{n+1}, \Delta\lambda]^{\mathrm{T}}$) とし，式（8）のテンソル成分を並べて形式的に列ベクトル表示する．ここで $\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{X}$ は 30 成分のベクトルである．反復計算における未知量ベクトル $\boldsymbol{X}$ の修正量 $\delta\boldsymbol{X}$ について線形化すると以下の通りである．

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}^{(k)}) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{X}}\right|_{\boldsymbol{X}^{(k)}} \cdot \delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

上添え字 (k) は第 k 回目の反復計算における値であることを示す．$\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{X}}$ は Jacobi 行列であり，30×30 の行列である．式 (9) を $\delta\boldsymbol{X}$ について解くと，Newton-Raphson 法による未知量ベクトル $\boldsymbol{X}$ の更新手続きは次式の通りである．

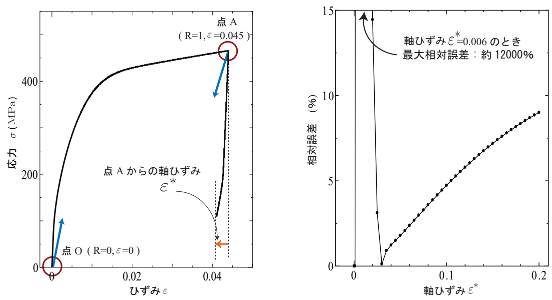
$$\delta\boldsymbol{X} = -(\boldsymbol{J}|_{\boldsymbol{X}^{(k)}})^{-1} \cdot \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}^{(k)}) \rightsquigarrow \boldsymbol{X}^{(k+1)} := \boldsymbol{X}^{(k)} + \delta\boldsymbol{X} \tag{10}$$

上式の更新手続きを反復的に行い，次式の収束判定基準を満たしたら求解完了とする．

$$\|\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}^{(k+1)})\| < \mathrm{TOL} \tag{11}$$

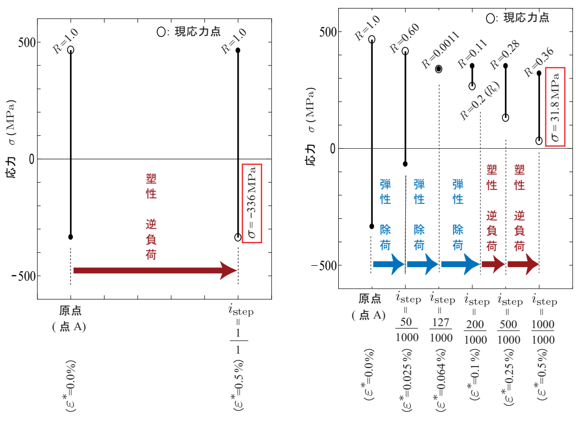
4.　数値計算例

上で定式化した拡張下負荷面モデルの一次元，三次元モデルそれぞれについてリターンマッピングにおける収束性と，数値計算精度について検証した．図示は省略するが，リターンマッピングアルゴリズムでは単純せん断において最大でせん断変形 $\gamma = 0.2$ のひずみを 1 ステップで与えても高い収束性が得られることを確認した．ここでは紙面の都合により一次元モデルの計算精度の検証結果を示す．**図–2**(a) に示すように下負荷面が正規降伏面と一致する ($R = 1$) まで単調負荷をした点 A を解析開始点とし，そこから逆方向の軸ひずみを与える解析を行う．ここで，軸ひずみを 1 ステップで与えたものを数値解とする．理論解を得ることは困難であるので，軸ひずみを 1000 ステップに等分割して計算した値を正解として用いる．正解に対する数値解の相対誤差と軸ひずみの関係を示した**図–2**(b) より，軸ひずみが 0.03 より小さい範囲では極めて大きな相対誤差が生じていることが分かる．この誤差発生の要因分析として，点 A からの軸ひずみが 0.005 の場合について，**図–3** に現応力点 σ の位置と $f_{\mathrm{sub}} = |\sigma_{\mathrm{mod}}| - Rq \leq 0$ で与えられる下負荷面内部領域における応力の範囲の推移を示した．この結果より，1 ステップで変形を与えると，逆負荷過程で弾性除荷から塑性負荷に転じる非古典塑性論特有の下負荷面の拡大・縮小プロセスが正確に計算できないことがある．



(a)　解析開始点.　　(b) 点 A からの誤差マップ.

図–2　一次元モデルの計算精度検証.



(a)　$N_{\mathrm{step}} = 1$.　　(b)　$N_{\mathrm{step}} = 1000$.

図–3　正規降伏比 $R = 1$ の状態から逆方向に 0.5%ひずみを与えたときの現応力点の位置と下負荷面内の範囲.

5.　おわりに

今後は上で述べた問題点の解決に取り組むとともに，有限変形の枠組みでの定式化にも試みる所存である．

参考文献

1) Hashiguchi, K.: Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, Vol. 47, pp. 266–272, 1980.

2) Hashiguchi, K.: Subloading surface model in unconventional plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 25, pp. 917–945, 1989.