

歪弾性モデルに用いる応力速度間の

微小変形状態におけるせん断抵抗特性の違い

東北大学工学部

○ 学生会員 藤本真明

東北大学大学院工学研究科

正会員 岩熊哲夫

東北大学大学院工学研究科

正会員 斉木 功

1. まえがき

歪弾性には Cauchy 応力の Jaumann 速度がよく用いられるが、材料の回転のみに追従した材料埋め込み座標で応力速度を定義しているため、せん断抵抗特性を正確に表現できていない可能性がある。実際、大きなせん断変形に対しては振動抵抗¹⁾を示す。本研究では、共回転応力速度に対峙させた Truesdell 応力速度を用いた場合のせん断変形特性を比較検討した。

2. 客観的な応力速度とその間の関係

よく用いられる Cauchy 応力の Jaumann 速度 $\overset{\nabla}{\sigma}$ は材料と共に回転する座標系から観測して

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}\sigma_{kj} - w_{jk}\sigma_{ki} \quad (1)$$

と定義される。ここに w はスピンである。一方、材料の変形にも追従した埋め込みの座標系から観測した Oldroyd 応力速度 $\overset{U}{\sigma}$ は

$$\overset{U}{\sigma}_{ij} = \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} - (d_{ik}\sigma_{kj} + d_{jk}\sigma_{ki}) \quad (2)$$

の違いで定義される。ここに d は変形速度である。その他の客観的な応力速度を図-1に列挙したが、右側が回転のみに追従した座標系から観測した共回転応力速度であり、左側が回転に加えてせん断変形も生じたゆがんだ座標系から観測した応力速度に相当する。右側を Jaumann 速度系列、左側を Truesdell 速度系列と呼ぶことにする。

3. Timoshenko 梁のせん断構成則

上述の Truesdell 速度系列は、例えば梁の断面に生じた直応力とせん断応力が直交しない方向成分である場合もうまく記述できると推測できる。そこで、いわゆる Timoshenko 梁理論の2つのせん断力の構成則を引用²⁾すると、高次元理論としては軸力 N は図-2のように、断面の法線方向 v とずれて生じる。そのため軸力とせん断力の構成関係は

$$N = EA\epsilon, \quad V = Gk_T A\gamma + N \frac{\gamma}{1 + \epsilon} \quad (3a, b)$$

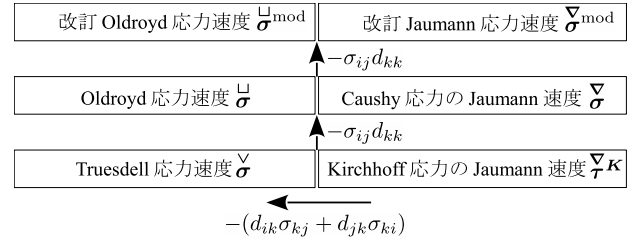


図-1 応力速度間の関係

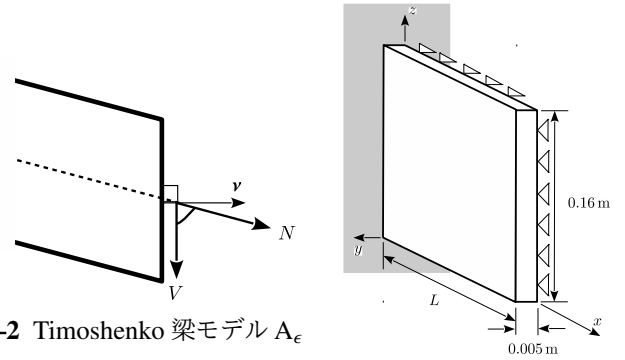


図-2 Timoshenko 梁モデル A_ϵ

図-3 解析に用いた梁

となる。ここに、 ϵ は軸の伸び、 γ はせん断変形、 E は Young 率、 G はせん断弾性係数、 A は断面積、 k_T は補正係数である。せん断力の第1項は断面のせん断変形 γ による成分であるが、第2項は図-2のような N が持つ V 方向成分である。このモデルを「モデル A_ϵ 」とする。これに対して N の方向のずれを無視したものを「モデル B_ϵ 」と呼ぶことにする。

この2つのモデルの違いは短い柱の座屈で顕著になり、前者モデルによる座屈荷重は Engesser 公式³⁾と呼ばれ、後者は改訂 Engesser 公式と呼ばれる。モデル B_ϵ はちょうどせん断変形を無視して回転のみに追従した座標系で N と V を評価していることに相当する。そこで、前節で定義した2系列の応力速度で定義した歪弾性の特性の差異を、この Timoshenko 梁理論のせん断の構成モデルの違いと比較して考察する。

4. 数値結果と考察

(1) 片持ち梁にせん断応力を与えた場合の抵抗特性

図-3のように、せん断の影響が顕著になるように $L = 0.2\text{ m}$ の非常に短い片持ち梁の自由端に z 方向にせん

Key Words: 歪弾性, 客観的な応力速度, せん断変形

〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻構造強度学研究室

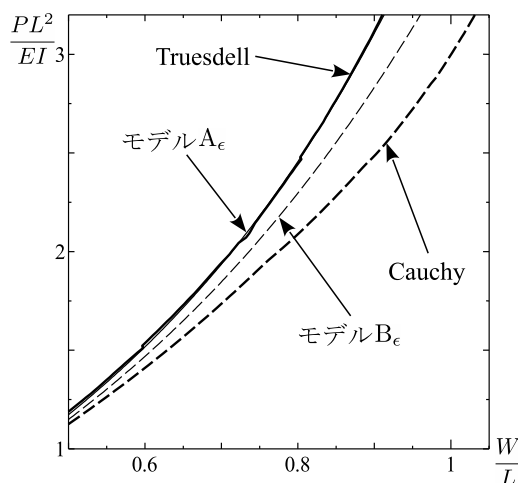


図-4 せん断力に対する応答

断力 P を与えた。ねじれが生じないように梁全体にわたって y 方向は拘束した。図-4に結果を示した。横軸は自由端の z 方向変位 W を L で除した値、縦軸は荷重を正規化した PL^2/EI である。 L は変形前の値、梁の断面二次モーメント I は変形後の値を用いている。 Truesdell 応力速度を用いた場合は、モデル A_ϵ の挙動とほぼ重なる一方、 Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合には、どちらかといえばモデル B_ϵ に近い挙動になっている。

(2) 初期不整のある片持ち梁の座屈後挙動

(1)と同様の片持ち梁の先端に z 方向の初期たわみ 0.001 m を与えて 0.5% だけ傾けた状態の先端に軸力をかけて座屈させた。図-5に結果を示した。ここでの P は軸力である。この場合も2つの応力速度による結果と Timoshenko 梁の2つのモデルの結果との関係は(1)の結果と同様であるが、 Jaumann 速度はモデル B_ϵ より高い座屈荷重を示した。後者の場合、せん断変形がうまく取り入れられていない可能性がある。

(3) 片持ち梁の座屈荷重

異なる梁の長さに対する座屈荷重をまっすぐの梁に対して求めるため、図-3の梁の自由端に軸力をかけていき、接線剛性が正から負に変わるときの荷重を座屈荷重 P_{cr} とした。梁の長さ L は 0.1 m , 0.125 m , 0.15 m , 0.175 m , 0.2 m , 0.3 m , 0.4 m のそれぞれの場合で解析した。結果を図-6に示した。横軸は梁の細長比 $\lambda = L/\sqrt{I_A}$ である。 L は変形前の値、 I と A は変形後の値を用いている。 Jaumann 速度系列を用いた場合は、特に細長比の小さい場合にモデル B_ϵ の座屈荷重に近いのに対し、 Truesdell 速度系列を用いた場合はモデル A_ϵ の座屈荷重とよく整合した。

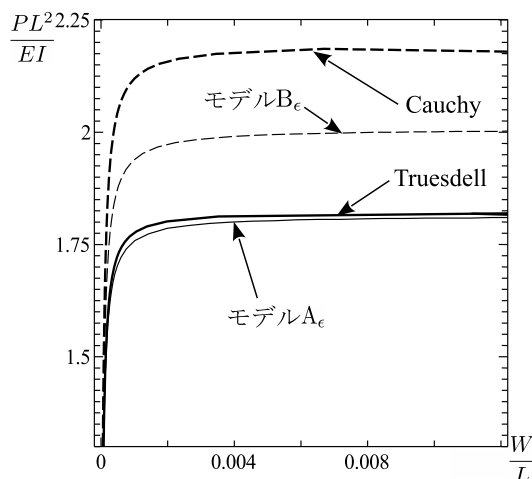


図-5 座屈後の挙動

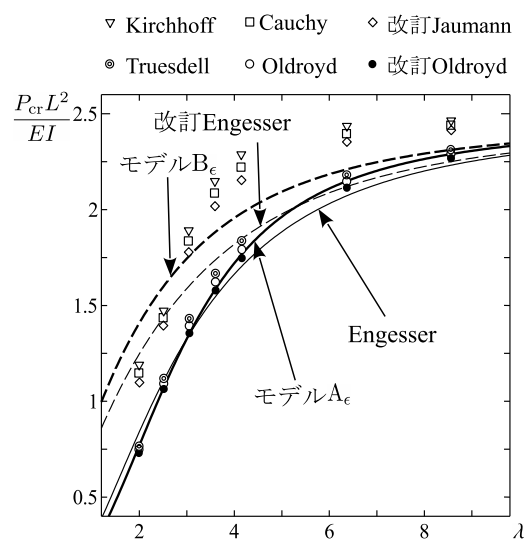


図-6 片持ち梁の座屈荷重

5. まとめ

まっすぐの柱の座屈では座屈前のせん断変形は零であるにもかかわらず、 Truesdell 速度系列で定義した亜弾性モデルは、直応力とせん断応力が直交しないモデルの座屈荷重を細長比の違いとは無関係によく予測できた。これに対し Jaumann 速度系列はせん断変形が小さいモデルの解の方にどちらかといえば近い結果となる。このことから、例えば結晶金属のような材料挙動を表す亜弾性には Jaumann 速度系列でも適用可能だが、一般には Truesdell 速度系列の方が適用範囲が広いと考えられる。

参考文献

- 1) Lee, E.H., Mallett, R.L. and Wertheimer, T.B.: Stress analysis for anisotropic hardening in finite-deformation plasticity, *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, Vol.50, pp.554-560, 1983.
- 2) Iwakuma, T.: Timoshenko beam theory with extension effect and its stiffness equation for finite rotation, *Comput. Struct.*, Vol.34, pp.239-250, 1990.
- 3) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.: *Theory of Elastic Stability*, Second Edition, McGraw-Hill, 1961.