# トポロジー最適化による材料微視構造の靭性最大化


| | | |
|---|---|---|
| ○東北大学工学部 | 学生員 | ○小川 竣 |
| 東北大学大学院工学研究科 | 学生員 | 干場 大也 |
| 東北大学大学院工学研究科 | 正　員 | 加藤 準治 |
| 東北大学大学院工学研究科 | 正　員 | 京谷 孝史 |


## 1. はじめに

近年，コンピュータを駆使した高度な材料設計法が注目されている．本研究では構造材料にとって重要な力学的特性である靭性に着目し，それを最大にする材料微視構造（ミクロ構造）の最適材料配置をトポロジー最適化によって求めるものである．本研究は，Kato ら[1)] が塑性変形を呈するマクロ構造を対象に開発した「低コストかつ超高精度感度」を与えるトポロジー最適化手法を「塑性変形下にあるミクロ構造の靭性最大化問題」にも適用できるように理論を拡張することを目的とし，その理論の正しさを有限差分法による感度解析結果と比較することで明らかにする．

## 2. 設計変数および最適化問題の設定

ここではミクロ構造の靭性を最大にするための最適化問題を設定する．そこで，要素ごとの材料体積比を設計変数 $s_j\,(j = 1, 2, \cdots, N)$ とし，目的関数 $f(\boldsymbol{s})$ および等式制約条件 $h(\boldsymbol{s})$ は以下のようにした．

$$\text{minimize}\qquad f(\boldsymbol{s}) = -\int_{\Omega}\int_{\hat{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega \qquad (1)$$

$$\text{subject to}\qquad h(\boldsymbol{s}) = \int_{\Omega} s_i\,\mathrm{d}\Omega - \hat{V} = 0 \qquad (2)$$

ここで，$\boldsymbol{\sigma}$ はミクロのコーシー応力, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ は制御点変位 $\hat{\boldsymbol{u}}$ に従う所与のミクロひずみ, $\hat{V}$ は材料 2 の占める体積を表す．なお，一般的には最小化問題として書き表すことが多いため今回は目的関数に $-1$ を乗じて最小化問題としている．

## 3. 周期境界条件

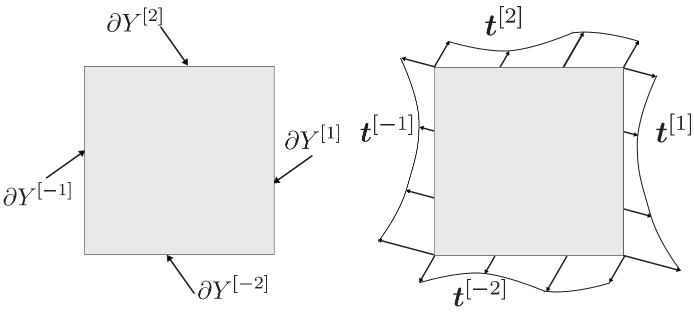
ミクロ構造（ユニットセル）に生じる変位 $\boldsymbol{w}$ は以下のように表される．

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}^* \qquad (3)$$

ここで，$\boldsymbol{y}$ はミクロ座標系, $\boldsymbol{E}$ はユニットセル中に一様に生じるマクロひずみであり，ミクロの変形には依存しない．また $\boldsymbol{u}^*$ はミクロ構造内の材料が不均質に配置されることによって生じる擾乱変位である．ユニットセルは周期性を持つため境界面 $\partial Y$ において以下の条件が成り立つ．

$$\boldsymbol{u}^*\,|_{\partial Y^{[k]}} = \boldsymbol{u}^*\,|_{\partial Y^{[-k]}} \qquad (4)$$

ここで，$\partial Y^{[k]}$ は**図–1** のように境界面 $k$ を表す. 以上のことからミクロ境界変位 $\boldsymbol{w}\,|_{\partial Y^{[k]}}$ に対して次の関係が成り立つ．




**図–1** ミクロ境界面 (左) およびミクロ表面力ベクトル (右)

$$\boldsymbol{w}^{[k]} - \boldsymbol{w}^{[-k]} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{l}^{[k]} \qquad (5)$$

簡単のため $\boldsymbol{w}\,|_{\partial Y^{[k]}} = \boldsymbol{w}^{[k]}$ とした. $\boldsymbol{l}^{[k]} = \boldsymbol{y}^{[k]} - \boldsymbol{y}^{[-k]}$ は矩形ユニットセルの境界辺ベクトルと呼ばれ，定数項である. 以上のことからミクロ構造では境界辺での相対変位が一定であり, ミクロひずみ $\boldsymbol{E}$ に依存して変形が生じる.

また, もう一つの条件として単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を有する境界面上に生じるミクロ表面力ベクトル $\boldsymbol{t}^{[n]} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}$ に関して反対称性があり次のようになる.

$$\boldsymbol{t}^{[k]} + \boldsymbol{t}^{[-k]} = \boldsymbol{0} \qquad (6)$$

## 4. 塑性材料モデルと緩和

使用材料モデルとして塑性材料モデルを使用し Von Mises の降伏応力および硬化関数は以下のようになる.

$$\Phi\left(\boldsymbol{\sigma}', \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' - \frac{1}{3}k^2\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right) \qquad (7)$$

$$k\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}\right) = \sigma_y + E^{\mathrm{h}}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \qquad (8)$$

ここで $\boldsymbol{\sigma}'$ は偏差応力テンソル，$\bar{\varepsilon}^p$ は相当塑性ひずみ，$\sigma_y$ は初期降伏応力，$E^{\mathrm{h}}$ は加工硬化係数である.

また，SIMP 法を拡張し，2 相材料でのトポロジー最適化を適用するため材料パラメータを次のように緩和した.

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_j &= \begin{cases} \left(1 - s_j^{\eta}\right)\mathbb{C}_1 + s_j^{\eta}\mathbb{C}_2 & \mathbb{C}_1 \le \mathbb{C}_2 \\ \left(1 - s_j\right)^{\eta}\mathbb{C}_1 + \left\{1 - \left(1 - s_j\right)^{\eta}\right\}\mathbb{C}_2 & \mathbb{C}_1 > \mathbb{C}_2 \end{cases} \\
E_j^h &= \begin{cases} \left(1 - s_j^{\eta}\right)E_1^h + s_j^{\eta}E_2^h & E_1^h \le E_2^h \\ \left(1 - s_j\right)^{\eta}E_1^h + \left\{1 - \left(1 - s_j\right)^{\eta}\right\}E_2^h & E_1^h > E_2^h \end{cases} \\
\left(\sigma_y\right)_j &= \begin{cases} \left(1 - s_j^{\eta}\right)\sigma_{y1} + s_j^{\eta}\sigma_{y2} & \sigma_{y1} \le \sigma_{y2} \\ \left(1 - s_j\right)^{\eta}\sigma_{y1} + \left\{1 - \left(1 - s_j\right)^{\eta}\right\}\sigma_{y2} & \sigma_{y1} > \sigma_{y2} \end{cases}
\end{aligned} \qquad (9)$$

**Key Words:** トポロジー最適化，複合材料，周期境界，塑性材料モデル
〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, TEL 022-795-7489

**表–1** 使用材料

| | 塑性材料 1 | 塑性材料 2 |
|---|---|---|
| ヤング係数 (MPa) | 30 | 1960 |
| ポアソン比 | 0.3 | 0.3 |
| 硬化係数 (MPa) | 10 | 900 |
| 初期降伏応力 (MPa) | 1.0 | 2.9 |

## 5. 感度解析

勾配基本法による最適化アルゴリズムを用いるため目的関数の設計変数に対する勾配 $\partial f/\partial s_i$ を求める必要がある．今回は目的関数の感度を求める際に境界面での相対変位を変位制御により制御させるという特別な条件を用いることで陰的な微分項である $\nabla_{s_j}\varepsilon$ の消去を行う．その結果，目的関数の感度は

$$\nabla_{s_j} f(\boldsymbol{s}) = -\int_{\Omega}\int_{\hat{\varepsilon}}\left(\nabla_{s_j}\boldsymbol{\sigma}\right) : \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathrm{d}\Omega \qquad (10)$$

となる．ここで応力感度 $\nabla_{s_j}\boldsymbol{\sigma}$ を算出することで全体の感度が求まる．応力感度 $\nabla_{s_j}\boldsymbol{\sigma}$ の導出に関しては弾塑性の基本式とリターンマッピングの理論式，さらには変形の履歴の影響を考慮するための条件付き微分を用いることで定式化をする．なお，応力感度の詳しい導出過程は文献 [1] を参照されたい．

## 6. 感度の精度検証

Kato ら [1] の感度解析手法をミクロ構造に適応した場合の精度を検証するため，有限差分法との感度の比較を行なった．使用材料は**表–1** に示したとおりで，$10\times10$ の正方形 8 節点要素で構成された 2 次元のユニットセルを用いた．これに相対変位を与えることで以下のマクロひずみによる変形をさせた．

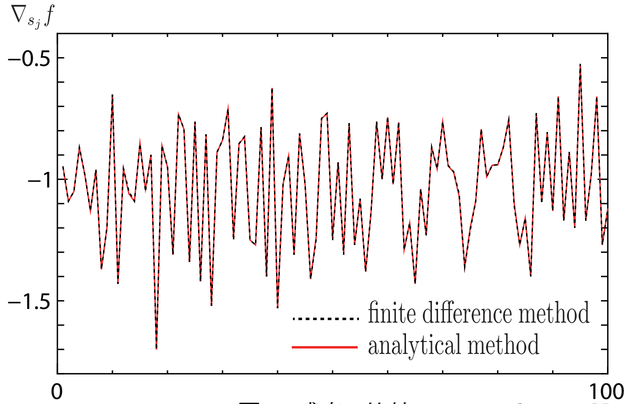
$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

要素ごとの感度の結果は**図–2** のようになり，最大誤差は 1.0% 以下であった．これらのことから感度の値はほぼ一致しており，周期境界を持つミクロ構造に対しても感度が極めて高い精度を有していることがわかった．

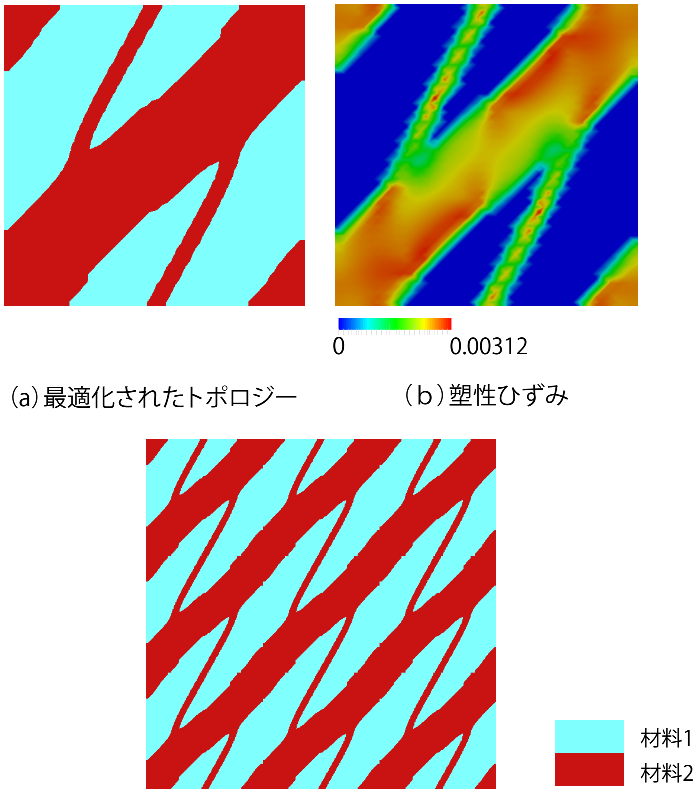
## 7. 最適化計算例

ここでは，本手法を用いた最適化計算例について述べる．今回は $32\times32$ の正方形 8 節点要素で構成された 2 次元のユニットセルを用いた．また，使用材料は**表–1** に示したものを用いた．変形形状は以下のようなマクロひずみ $\boldsymbol{E}$ を与え，変形を生じさせた．

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0.005 \\ 0.005 & 0.0025 \end{bmatrix} \qquad (12)$$




**図–2** 感度の比較




(a) 最適化されたトポロジー　(b) 塑性ひずみ

(c) ミクロ構造 (3×3パッチ)

**図–3** 最適化結果

**図–3** はその結果を示しており，引張り + せん断の変形に対抗するようなトポロジーが得られた．

## 8. 結論

本研究では周期境界をもつミクロ構造に対して文献 [1] で述べられた非線形複合材料のためのトポロジー最適化手法の適用を行なった．感度の精度の検証ではミクロ構造に対しても文献 [1] の手法の利用が可能であることが示された．これにより材料開発の分野においても信頼度の高い最適設計が可能となった．

### 参考文献

1) Kato, J., Hoshiba, H.,Takase, S.,Terada ,K. and Kyoya, T., “Analytical sensitivity in topology optimization for elastoplastic composites”, *Struct. Multidisc. Optim.*,2015, Volume 52, Issue 3, pp 507-526.