

○東北大学工学部 学生員 渡辺 有
東北大学大学院工学研究科 正 員 京谷 孝史
東北大学大学院工学研究科 正 員 加藤 準治

1. はじめに

石炭鉱山の坑道上の地表沈下現象には主に盆上沈下と浅所陥没がある。緩慢な現象である盆上沈下と比べて、浅所陥没は突発的な現象であるため発生の予測が困難である。石炭化度が低く、地表から比較的浅い位置に分布している亜炭は主に残柱式で掘削され、浅所陥没が起きやすい。亜炭田が多く存在する東海地方や東北地方では現在も亜炭廃坑空洞が多く残されており、陥没事故が多く起きている。本研究では、浅所陥没が起こりやすい残柱式で掘削された亜炭廃坑空洞を対象に、有限要素モデルを用いた極限荷重解析によって、経年劣化に伴う陥没の危険度を評価する。ここで用いる極限荷重解析は、完全塑性体に対して比例載荷を行う際の極限荷重を線形計画問題を通して求めるものである。

2. 極限荷重解析の概要

極限荷重を求める問題を下界定理に基づいて、以下の式を満たす静的可容応力場 σ_{ij} のうち荷重係数 λ を最大にするものを探すものとする。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \lambda b_i = 0 \quad \text{in } V \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \lambda t_i^0 \quad \text{on } S_t \quad (2)$$

$$f(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad \text{in } V \quad (3)$$

S_t は表面荷重が与えられた境界、 V は全領域を示す。また、 t_i^0 は単位表面荷重、 b_i は単位体積力である。任意の運動学的可容な塑性流動速度場を v_i とすると、完全塑性体を想定していることから仮想仕事式は以下ようになる。

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dV = \lambda \left(\int_{S_t} t_i^0 v_i dS_t + \int_V b_i v_i dV \right) \quad (4)$$

有限要素法を適用して離散化すると、各要素の B マトリックスをずらして重ね合わせた全体系の行列を $[\bar{B}]^T$ 、全要素の静的可容応力を $\{\sigma\}$ 、単位荷重 t_i^0 、 b_i に対応する全節点の荷重ベクトルを $\{F\}$ として、式 (4) は以下の式のようにになる。

$$[\bar{B}]^T \{\sigma\} = \lambda \{F\} \quad (5)$$

さらに、式 (5) を満たす静的可容応力 $\{\sigma\}$ は次式で表すことができる。

$$\{\sigma\} = \lambda \{\sigma_e\} + \{\sigma_r\} \quad (6)$$

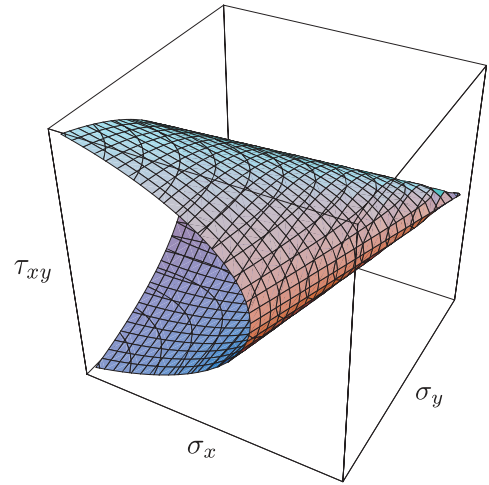


図-1 Mohr-Coulomb の降伏曲面の形状

ここに、 $\{\sigma_e\}$ は節点単位荷重 $\{F\}$ とつり合う弾性応力、 $\{\sigma_r\}$ は荷重 $\{0\}$ とつり合う応力であり、それぞれ次式を満たす。

$$[\bar{B}]^T \{\sigma_e\} = \{F\} \quad (7)$$

$$[\bar{B}]^T \{\sigma_r\} = \{0\} \quad (8)$$

降伏基準の具体的な関数として、ここでは Mohr-Coulomb の降伏基準

$$f(\sigma) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \tau_{xy}^2\right)} - c \cos \phi + \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) \sin \phi \leq 0 \quad (9)$$

を用いる。その降伏曲面は図-1 のようである。この滑らかな降伏曲面を 8 枚の接平面で覆い、凸多角錐 (八角錐) に置き換える。図-2 に示すように、中心 O から放射状に等間隔で出る 8 つの単位ベクトル n_k ($k = 1, 2, \dots, 8$) を考える。 n_k を β 倍すると降伏曲面に到達するとし、そのときの降伏面上の応力を σ'_k とすれば、以下の式が成立する。

$$f(\sigma'_k) = f(\beta n_k) = 0 \quad (10)$$

この σ'_k における降伏関数の勾配ベクトル $\partial f / \partial \sigma|_{\sigma'_k}$ をそれ自身の長さで割ったものを N_k とすると、 N_k は図-2、図-3 に示すような降伏面上の外向き単位法線ベクトルになり、 N_k に垂直な平面が σ'_k における接平面になる。こうして求めた 8 枚の接平面について、原点からの距離を R_k とし、 $[N]$ と $[R]$ をそれぞれ

$$[N] = [N_1, N_2, \dots, N_8]^T \quad (11)$$

$$\{R\} = \{R_1, R_2, \dots, R_8\}^T \quad (12)$$

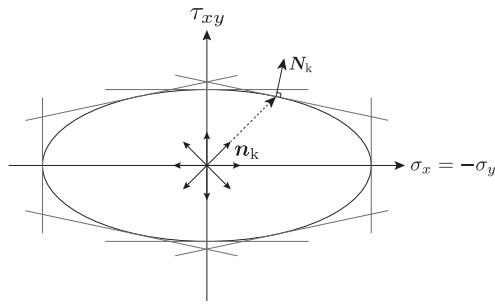


図-2 降伏曲面とその接平面 (断面)

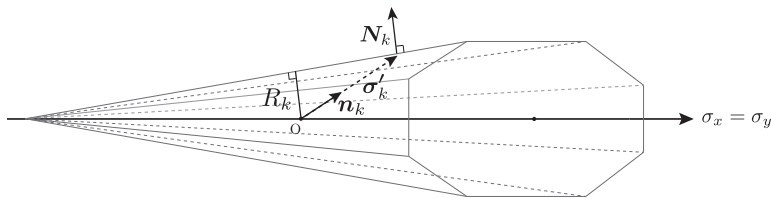


図-3 八角錐で近似した降伏曲面

とすると、降伏関数 $f(\sigma) \leq 0$ は図-3 を見れば分かるように、以下の線形不等式として表すことができる。

$$[N]\{\sigma\} \leq \{R\} \quad (13)$$

したがって、極限荷重解析は次のように定式化される。

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \lambda \\ &\text{subject to} && [\bar{B}]^T \{\sigma_e\} = \{F\} \\ & && [\bar{B}]^T \{\sigma_r\} = \{0\} \\ & && [N] (\lambda \{\sigma_e\} + \{\sigma_r\}) \leq \{R\} \end{aligned}$$

これは、変数 $\{\lambda, \sigma_r\}^T$ について線形の目的関数を線形制約条件の下で最大化する線形計画問題であり、シンプレックス法によって解くことができる。

3. 安定性評価解析結果

残柱式で掘削された亜炭廃坑の断面図は図-4 のようになる。愛知県の春日井市の潮見坂地区において浅所陥没が発生した亜炭廃坑空洞の地表からの平均深度は 12.1m であり、深度 30m になるとほとんど浅所陥没が発生しなくなると報告されている¹⁾。また、廃坑空洞の幅は 10m ほどのものが多い。以上のことから、廃坑空洞の幅を w 、地表面から空洞天盤までの深さを h とすると、 $w = 10$ m で一定とし、 $h = 10, 20, 30$ m の 3 ケースを考え、図-5 のような有限要素モデルに自重のみを単位荷重として加える極限荷重解析を行う。

解析では、空洞天盤の経年劣化を想定し、内部摩擦角 ϕ を固定し粘着力 c を変化させて、自重によって破壊が生じる ($\lambda = 1$) ときの粘着力 c を図-6 のように求めた。内部摩擦角が $\phi = 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ$ それぞれの場合において $\lambda = 1$ となるような粘着力 c (t/m²)、 σ_c (t/m²) を求めると、表-1 のようになった。

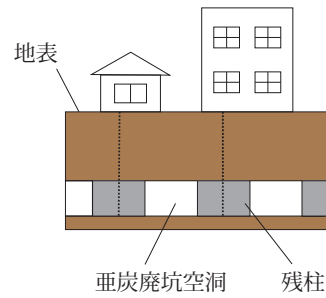


図-4 残柱式掘削による亜炭廃坑空洞の断面概略図

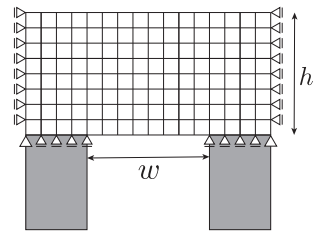


図-5 解析モデル

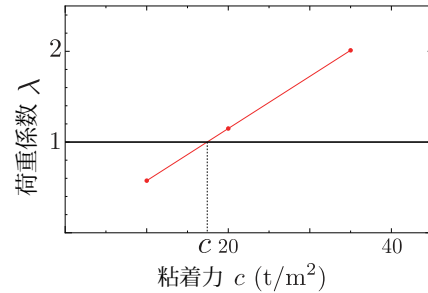


図-6 $h = 10$ m, $\phi = 15^\circ$ のときの粘着力 c と荷重係数 λ の関係

表-1 $\lambda = 1$ のときの土質定数 c, ϕ と一軸圧縮強度 σ_c

	$h = 10$ m		$h = 20$ m		$h = 30$ m	
ϕ	c	σ_c	c	σ_c	c	σ_c
0°	31.3	62.7	43.7	87.3	62.5	125.0
5°	24.2	52.8	33.7	73.5	48.3	105.4
10°	18.6	44.4	25.3	60.3	36.2	86.4
15°	17.4	45.3	18.4	48.0	26.3	68.6
20°	18.8	53.8	13.9	39.6	19.1	54.5
25°	20.4	64.2	14.9	46.8	14.5	45.6
30°	22.2	77.0	16.2	56.2	12.6	43.7
35°	24.3	93.3	17.7	68.0	11.6	44.5
40°	26.8	115.0	19.4	83.3	10.7	46.0
45°	30.0	145.0	21.5	103.6	10.0	48.4

4. まとめ

本研究では、有限要素法を用いた極限荷重解析によって、 $h = 10, 20, 30$ m の 3 ケースにおける荷重係数 λ と土質定数である粘着力 c 、内部摩擦角 ϕ の関係を調べ、この関係から、自重によって破壊が生じる $\lambda = 1$ のときの地盤の粘着力 c と内部摩擦角 ϕ の値を求めた。このことによって、地盤がどの程度劣化しているか、すなわちその地盤の粘着力 c 、内部摩擦角 ϕ の値が分かれば、現時点での安定性が評価できる。

参考文献

- 1) 江崎 哲郎：浅所陥没とその対策，充てん，第 43 号，2003。
- 2) 川本 眺万：亜炭掘削跡空洞の充填事業の変遷，一般社団法人充填技術協会，2015。
- 3) Maier, G.: Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and nonassociated flow-laws: a finite element linear programming approach, *Meccanica* 4, 3, pp.250-260, 1969。