熱変形を考慮した熱弾性体のトポロジー最適化

○東北大学工学部　学生員　市川 智
東北大学大学院工学研究科　正　員　加藤 準治
東北大学大学院工学研究科　正　員　高瀬 慎介
東北大学災害科学国際研究所　正　員　寺田 賢二郎
東北大学大学院工学研究科　正　員　京谷 孝史

1. はじめに

本研究は，構造のトポロジーに依存しない一般的な力学的荷重に加えて，それに依存する熱荷重を考慮し，その両方の荷重を考慮したトポロジー最適化問題を取り扱う．ここでは所与の材料体積量一定のもと，両荷重に対するコンプライアンス最小化を試みる．本研究の数値計算例では，単一材料を対象にその結果について考察する．

2. 設計変数および最適化問題の設定

本研究ではトポロジー最適化のために材料表現法を用いる．材料密度は，phase-1 と phase-2 の材料体積比に置き換えられる．従って有限要素メッシュで離散化された i 番目の要素について，設計変数 s_i を次のように表す．

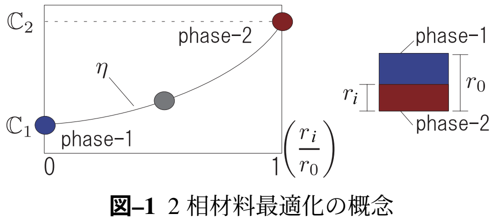
$$s_i = \frac{r_i}{r_0}, \qquad 0 \leq s_i \leq 1 \tag{1}$$

図–1 で示すように，r_0 はある有限要素の厚み, r_i は要素内の phase-2 の厚みである．この場合，設計変数は要素内における phase-2 の体積比（$s_i = r_i/r_0$）である．

目的関数 $f(\boldsymbol{s})$ および，等式制約条件 $h(\boldsymbol{s})$ は以下のように設定している．

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} && f(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} && (2)\\
&\text{subject to} && h(\boldsymbol{s}) = \int_\Omega s_i \,\mathrm{d}\Omega - V_0 = 0 && (3)\\
& && \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{m}} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{th}} && (4)\\
& && 0 < s_i \leq 1 && (5)
\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{K}$ はそれぞれ節点変位ベクトルと剛性行列である．また，$\boldsymbol{F}^{\mathrm{m}}$ と $\boldsymbol{F}^{\mathrm{th}}$ はそれぞれ外荷重と熱荷重に対応する．V_0 は所与の材料体積である．



図–1 2 相材料最適化の概念

3. 熱荷重ベクトル

定常状態の仮定のもとでは，要素の熱荷重は次のように表せる．

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{th}} = \int_\Omega \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}} d\Omega \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{B}$ は B マトリックス，$\boldsymbol{D}$ は弾性マトリックスである．この $\boldsymbol{D}$ を設計変数に依存するヤング係数と，そうでない部分に分けて以下のように表す．

$$\boldsymbol{D} = E(s_i)\overline{\boldsymbol{D}} \tag{7}$$

ここで，$\overline{\boldsymbol{D}}$ は定数である．$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}}$ は熱ひずみベクトルであり以下のように表せる．

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{th}} = \alpha(s_i)(t - t_{\mathrm{ref}})\,\phi^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

ここで，$\alpha(s_i)$ は熱膨張係数である．t_{ref} は初期の節点における温度を表し，t はその時点での積分点の温度を表す．ϕ は 2 次元問題においては，$\phi = \left\{ 1 \quad 1 \quad 0 \right\}^{\mathrm{T}}$ である．式 (7) と式 (8) を，式 (6) に代入することで以下のように表せる．

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{th}} = E(s_i)\alpha(s_i)\Delta T \int_\Omega \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{D}}\,\phi^{\mathrm{T}}\, d\Omega \tag{9}$$

この式において，$E(s_s)$ と $\alpha(s_i)$ はどちらも設計変数に依存しているため，それぞれ正則化する必要がある．しかし，この場合，剛性行列 $\boldsymbol{K}$ はヤング係数 $E(s_i)$ に対して線形の依存であるが, 熱荷重 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{th}}$ は $E(s_i)$ と $\alpha(s_i)$ の積に依存することから, 両者の設計変数に対する次数が異なる. この違いが結果的に不適合性を生む原因になりうるので，これを解消するために本研究で熱応力係数 β[1] を導入している．β は，次のように，熱膨張係数 $\alpha(s_i)$ とヤング係数 $E(s_i)$ とで一つの項をつくりだす．

$$\beta(s_i) = E(s_i)\alpha(s_i) \tag{10}$$

すなわち，$\beta(s_i)$ は一つの材料特性として扱われ正則化されることになる．これにより, あらためて $\boldsymbol{F}^{\mathrm{th}}$ を以下のように表す．

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{th}} = \beta(s_i)\Delta T \int_\Omega \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{D}}\,\phi^{\mathrm{T}}\, d\Omega \tag{11}$$

次に，設計空間における解の不連続性を内挿関数によって

Key Words: トポロジー最適化，熱弾性，熱応力，構造依存荷重
〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06, TEL 022-795-7489

正則化する．本研究ではRAMP法[2]を使用してヤング係数E，およびβについて，**図–1**に示す二相材料最適化の概念を用いて以下のように設定した．

$$E_j = \left\{1 - \frac{s_j}{1 + q_E(1 - s_j)}\right\} E_1 + \frac{s_j}{1 + q_E(1 - s_j)} E_2 \qquad (12)$$

$$\beta_j = \left\{1 - \frac{s_j}{1 + q_\beta(1 - s_j)}\right\} \beta_1 + \frac{s_j}{1 + q_\beta(1 - s_j)} \beta_2 \qquad (13)$$

ここで，2つの材料の材料定数を添え字1，2によって区別している．なお，q_Eおよびq_βは物理的意味を保証しない定数である．

4. 感度解析

本研究では，最適化規準法による最適化アルゴリズムを用いるため，目的関数の設計変数に対する勾配$\partial f/\partial s_i$を求める必要がある．その場合，以下のように変位の勾配を含む陰的項が現れる．

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = 2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial s_i} - \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial s_i} \boldsymbol{u} \qquad (14)$$

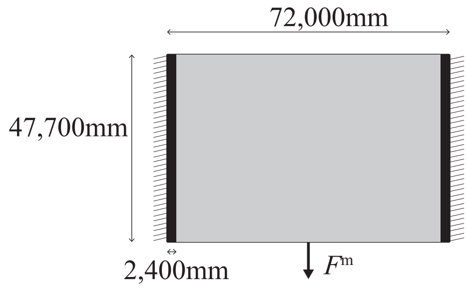
この項を式(4)を微分したものを代入して消去し，外荷重が設計変数に依存しないことを考慮すると，目的関数の感度として以下の式を得る．

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = 2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{F}^{\mathrm{th}}}{\partial s_i} - \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial s_i} \boldsymbol{u} \qquad (15)$$

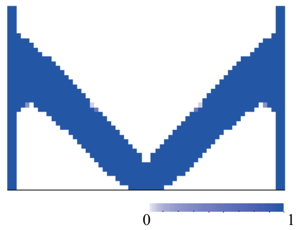
5. 最適化計算例

ここでは, 本手法を用いた最適化計算例を紹介する．**図–2**は今回使用した構造モデルである．両端で固定されており, 左右にそれぞれ2,400mmの非設計領域(設計変数を1で固定)を設定している．単一材料を想定し, そのヤング係数は210GPa, ポアソン比は0.3である．中心に下向きに$\boldsymbol{F}^{\mathrm{m}}$の外荷重を与えており，さらに全体を一様に温度変化させた．設計領域の体積制約は30 %とした．

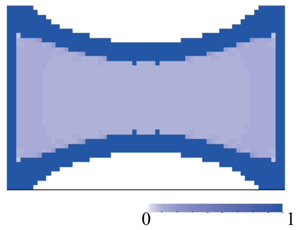
まず, 比較のために**図–3**に熱を与えず外荷重のみを与えた場合の最適化結果を示す. **図–4**は外荷重を載荷せず, 温度変化として$\Delta T = \pm 30$ ℃をそれぞれ与えたものの最適化結果である. これらの条件下では熱膨張および熱収縮ともに同じ最適化トポロジーが得られることが確認された. また, **図–5**は, それらのミーゼス応力分布である. 応力の発生しやすい左右境界付近, 変位の大きくなる上下端を避けて材料配置しているのが確認できる. 次に**図–6**, **図–7**は外荷重として下向きに0.3kNを与えた上で, $\Delta T = \pm 30$ ℃をそれぞれ与えたものである. 温度降下の場合を見ると, 左右端との接続部が上に上がっていることがわかる. 温度上昇の場合を見ると, 接続部が下側になり，トポロジーが大きく異なっていることがわかる．



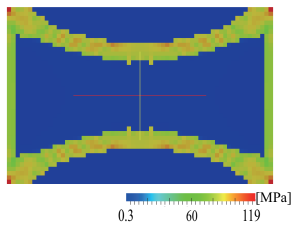
図–2 使用モデル



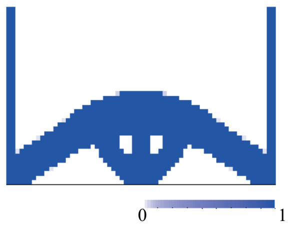
図–3 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{m}}$=0.3kN, $\Delta T = \pm 0$°C の最適化結果



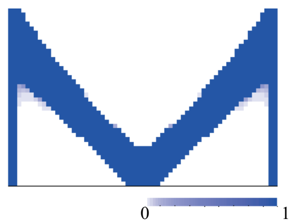
図–4 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{m}}$なし,$\Delta T = \pm 30$°C の最適化結果



図–5 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{m}}$なし,$\Delta T = \pm 30$°C の Mises 応力分布



図–6 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{m}}$=0.3kN, $\Delta T =$ +30°C の最適化結果



図–7 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{m}}$=0.3kN, $\Delta T =$ −30°C の最適化結果

温度変化により, 外荷重のみが作用していた時には応力があまり生じていなかった領域に応力が生じるようになり, 温度降下の場合は温度変化により生じる引張を弱めるように, 温度上昇の場合は圧縮を弱めるように構造が変化していることがわかる．

6. まとめ

本論文では, 外荷重と熱荷重の両方が作用する問題に対してトポロジー最適化を行った. 温度を与えることで得られたトポロジーは力学的にも矛盾のない結果が得られることを確認した．

参考文献

1) T. Gao, W. Zhang : Topology Ooptimization involving thermo-elastic stress loads, *Struct. Multidisc. Opt.*, 42, 725-738, 2010.
2) M. Stolpe, K. Svanberg: An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization, *Struct. Multidisc. Opt.*, 22, 116-124, 2001.