

はり部材非線形挙動の簡易表現法

東北学院大学 学生会員 ○佐藤 優輝, 三品 健太
東北学院大学 正会員 吉田 望

1 はじめに

はりがモーメントを受けると、端部から非線形が始まるので、モーメントー曲率関係は非線形になる。さらに、材軸方向でモーメント分布が均一でないと、軸方向にモーメントー曲率関係は異なる。このような問題を解析的に解くことは、単純なケースでない限りほとんど不可能といえる。ここでは、構造解析をターゲットとして、はりの非線形挙動を簡易に表現できる方法を検討した。

2 解析モデル

簡単のため、30×40cmの断面をもつ長さ1mの片持ちばりが先端集中荷重を受けることを考える。せん断変形は無視し、ヤング係数 E を $2.1 \times 10^8 \text{kN/m}^2$ と設定する。また、応力ーひずみ関係は弾完全塑性モデルとし、降伏応力 σ_y を $???\text{kN/m}^2$ とした。

長方形断面部材で、一部が非線形化している際のモーメント M ー曲率 κ 関係は以下ようになる。

$$M = \frac{2}{3} E b y_y^3 \kappa + M_p - \sigma_y b y_y^2 \quad (1)$$

ここで、 b は断面幅、 y_y は弾塑性境界の高さ、 M_p は全塑性モーメントである。これを用いると、先端荷重 P と先端たわみ y の関係は次のようになる (M_y は端部が降伏する際のモーメント)。

$$\text{弾性 } (PL \leq M_y) \quad y = \frac{PL^3}{3EI} \quad (2)$$

$$\text{非線形 } (PL > M_y) \quad y = \frac{PL}{2EI} (L^2 + x_y^2) - \frac{P}{6EI} (L^3 - 2x_y^3) + \left(\dot{y}|_{x=x_y} - \frac{PL}{EI} x_y + \frac{P}{2EI} x_y^2 \right) x + \left(y|_{x=x_y} - \dot{y}|_{x=x_y} x_y \right)$$

ここで、 $x_y = L - \frac{2M_p}{3P}$ 、 $y|_{x=x_y}$ 、 $\dot{y}|_{x=x_y}$ は材軸方向に非線形が始まる地点の座標、たわみおよびたわみ角で、

$$x_y = L - \frac{2M_p}{3P}, \quad y|_{x=x_y} = \frac{4}{P_2 E} \sqrt{\frac{\sigma_y^3 b}{3}} \left\{ \frac{(M_p - M_y)^{1.5}}{3} - (M_p - PL)^{0.5} PL \right\} \quad (3)$$
$$\dot{y}|_{x=x_y} = \frac{2}{EP} \sqrt{\frac{\sigma_y^3 b}{3}} \left\{ (M_p - M_y)^{0.5} - (M_p - PL)^{0.5} \right\}$$

である。これでは使いにくいので、断面を複数の線素に分け M ー κ 関係を求めると、おおよそ5分割でほぼ解析解と同じ関係を得ることができた。さらに、これを Tri-linear のモデル化する。この、簡単なモデルの第2剛性までを用いて、同じ片持ちばりの P - y 関係を求めると次のようになる。

$$y = \frac{PL^3}{3E_0 I} x^2 + \left((kS - PL) x_p + \frac{(1-k)P}{2} x_p^2 \right) (L - x_p) + \left(\frac{kS}{2} - \frac{PL}{2} \right) x_p^2 + (1-k) \frac{P}{6} x_p^3 \quad (4)$$

ここで、 k は剛性比、 $S = PL + E_1 I \kappa_y - M_y$ 、 κ_y は剛性が変わる際の曲率である。これで少しは簡単になったが、それでも、多くの部材で構成される構造物には適用できそうにない。そこで、次に、有限要素法による近似を考える。

3 回転ばねモデル

はり、柱部材の非線形を簡易に考慮する方法として、塑性ヒンジがある (たとえば、文献1))。しかし、

キーワード はり、モーメントー曲率関係、回転ばねモデル

連絡先 〒985-8537 宮城県多賀城市中央1-13-1東北学院大学工学部環境建設工学科 TEL 022-368-7193

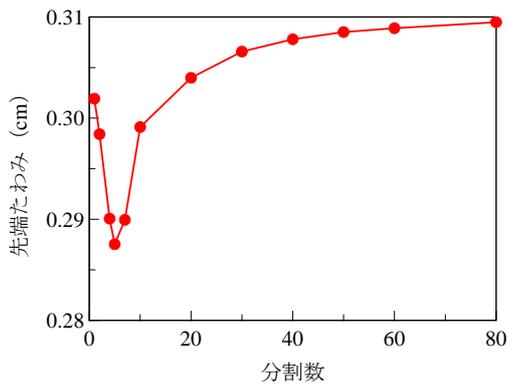


図-1 はりの分割数によるたわみの変化

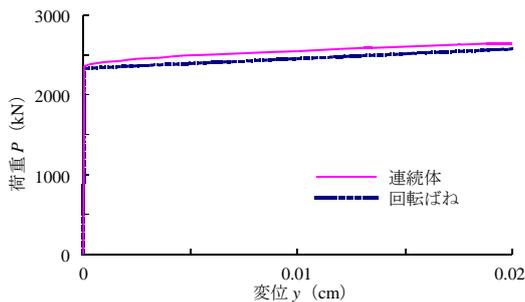


図-2 P-y 関係の算出

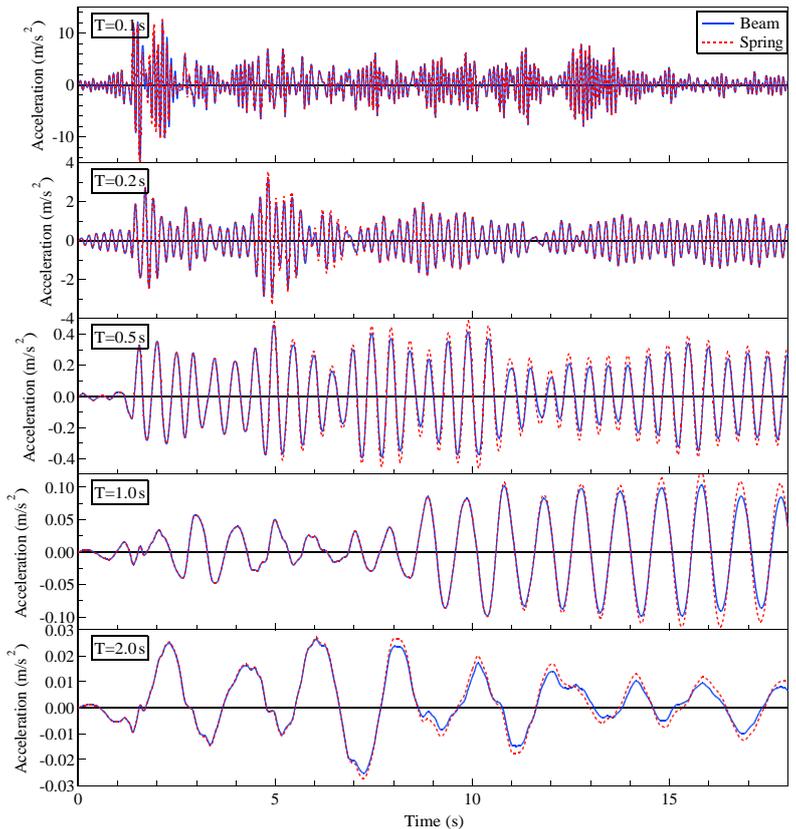


図-3 加速度時刻歴の比較

塑性ヒンジは弾完全塑性挙動しか追跡でき

ないという欠点もある。そこで、より柔軟に非線形挙動を追う方法として、端部に非線形回転ばねを用いることを考える。

まず、はり要素としてどの程度分割すれば充分かということを検討する。はりを長さ方向に分割し、それぞれを非線形のモーメント-曲率関係もつ部材として有限要素法で解析する。ここで、はり要素の剛性は、部材の中央部の断面力（等モーメント）により評価する。図-1に分割数と、先端たわみの関係を示す。分割数が5まではたわみが小さくなるが、その後は分割数に従い、先端たわみは一定値に近づいていく。しかし、そのためには数十に分割する必要があるが、このように単純な構造物でも問題の難しさがわかる。

ここでは、この先端たわみから、式(2)に示される弾性変形を減じたものを回転ばねのモーメント-回転角関係とする。ただし、このようにすると、初期剛性は無限大となるので、代わりにかなり大きい値を用いる。図-2にこのようにして求めた P-y 関係をはりモデルと比較して示す。

3 地震応答解析による検証と考察

設定した回転ばねモデルの適用性を検討するため、先端に質点をつけ、地震応答解析を行った。地震波は1968年十勝沖地震の際開北橋で観測された記録の橋軸方向成分で、最大モーメントが M_y と M_p の間にある様に大きさを調整したものである。質点の質量は、系の固有周期 T が0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0秒となるよう、5種類に変えた。図-3に加速度時刻歴を比較して示す。ここで、Beam とあるのは、材軸方向に5分割したはり、Spring とあるのは基盤に回転ばねを取り付けたモデルである。

最大加速度と最大変位について誤差（差のはりモデルの応答に対する比）を求めると、固有周期の小さい純から、加速度で8.30, 13.37, 6.92, 22.55, 3.08%, 変位で0.0, 0.0, 0.99, 16.85, 0.07%となり、特に $T=1$ 秒のケースで誤差が大きい。また、加速度は回転ばねの方が大きく、変位は回転ばねの方が大きかったことから、回転ばねの方が剛性を大きく評価している可能性がある。今後、より詳細に検討したい。

参考文献 1) Yoshida, N. and Nonaka, T. (2001): Hysteretic behavior of a bar under repeated axial loading: an extended history, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASTM, Vol. 68, No. 3, pp. 425-431