

均質化梁理論に基づくせん断遅れの数値的評価に関する基礎的検討

東北大学工学部

○学生会員

西井大樹

東北大学大学院工学研究科

正会員

斉木 功

東北大学大学院工学研究科

正会員

岩熊哲夫

1. はじめに

合成桁のような幅の広い梁のフランジにおける曲げ応力の橋軸直角方向分布はせん断遅れのために一定にならない。ウェブから離れると曲げ応力が小さくなるため、フランジの有効幅を考慮して初等梁理論を用いるのが一般的である。道路橋示方書¹⁾においては、フランジ幅と支間長により有効幅を定めている。

一方で、周期境界条件を用いた均質化梁理論²⁾により、梁の代表体積要素に曲げモーメントとせん断力を独立に作用させる自由度の高い数値要素試験が可能になった。そこで、本研究では均質化梁理論によって数値的に求めた変位分布を解析的手法³⁾に組み込み、簡便かつ高精度なせん断遅れの半解析的手法を提案する。

2. 解析手法

(1) 周期境界条件

本研究では図-1に示す x_1 方向に長さ r_1 の周期性を有する単位構造を代表体積要素とする。周期境界条件によるせん断変形は独立断面上の節点 i と従属断面上の節点 d のペアに対して面外せん断ひずみ γ を用いて

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^d - \mathbf{u}^i = \begin{Bmatrix} 0 & \gamma r_1 & 0 \end{Bmatrix}^T \quad (1)$$

という相対変位によって与えられる。

相対変位のみを与えた場合、代表体積要素は変形せず剛体回転してしまう。そこで、周期方向の各位置における断面の回転の平均を代表体積要素の回転とし、これを拘束することで剛体回転を拘束する²⁾。

(2) せん断遅れを考慮した梁のたわみ

梁全体の中立面からせん断遅れを考慮する部材の図心軸までの距離を h 、たわみを z とすると、せん断遅れを考慮する部材の図心軸上の橋軸方向変位 u_1 は

$$u_1(x_1, x_2) = h \left\{ \frac{d^2 z}{dx_1^2} + f(x_2)g(x_1) \right\} \quad (2)$$

と表せる。 $f(x_2), g(x_1)$ はそれぞれせん断遅れによる $u_1(x_1, x_2)$ の相対的な分布と大きさを表す関数で、Reissner³⁾は $f(x_2)$ を二次関数と仮定している。本解析

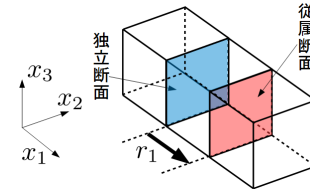


図-1 代表体積要素

では周期境界条件のもとでせん断変形を与えた有限要素解析を行い、得られた $u_1(x_1, x_2)$ から数値的に $f(x_2)$ を求める。 $g(x_1)$ は後述する変分問題で求めるため、 $f(x_2)$ を最小値 0、最大値 1 となるように規格化する。

解析対象領域を V として、

$$V = S \times L \quad (3)$$

$$S = S_f \cup S_w, \quad S_f \cap S_w = \phi \quad (4)$$

$$L = \left\{ x_1 \mid -\frac{\ell}{2} \leq x_1 \leq \frac{\ell}{2} \right\} \quad (5)$$

と定義する。ここで、 ℓ は支間長、 S_f はフランジや床版等のせん断遅れを考慮する部材の断面、 S_w はウェブ等それ以外の部材の断面である。

曲げを受ける梁の全ポテンシャルエネルギー Π を

$$\Pi = \Pi_f + \Pi_w - \Pi_l \quad (6)$$

と表す。ここで、 $S_f \times L$ のひずみエネルギー

$$\Pi_f = \frac{1}{2} \int_L \int_{S_f} (E\epsilon^2 + G\gamma^2) dAdx_1 \quad (7)$$

$S_w \times L$ のひずみエネルギー

$$\Pi_w = \frac{1}{2} \int_L EI_w \left(\frac{d^2 z}{dx_1^2} \right)^2 dx_1 \quad (8)$$

外力ポテンシャルエネルギー

$$\Pi_l = \int_L q(x_1)z dx_1 \quad (9)$$

であり、ヤング率 E 、せん断弾性係数 G 、 S_w の断面二次モーメント I_w 、単位長さあたりの鉛直外力 $q(x_1)$ 、軸ひずみ ϵ を用いた。梁の境界値問題と等価な変分問題は、系の全ポテンシャルエネルギーを停留させる問題となる。曲げモーメントを M とすると式 (6) の汎関数の停留条件 $\delta \Pi = 0$ から、 z に関する微分方程式

$$M + EI \frac{d^2 z}{dx_1^2} + \int_L \int_{S_f} h^2 E f \frac{dg}{dx_1} dAdx_1 = 0 \quad (10)$$

Key Words: 周期境界条件, せん断遅れ, 均質化梁理論, 有限要素解析

〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06

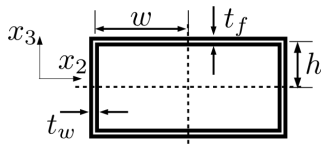


図-2 断面形状

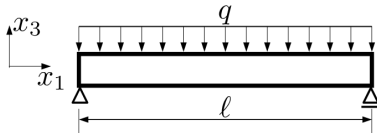


図-3 拘束，荷重条件

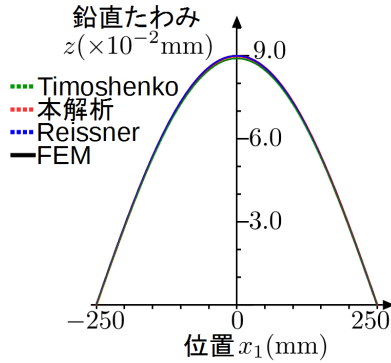


図-4 たわみ分布 (全体)

$$\int_L \int_{S_f} h^2 \left\{ E f \frac{d^3 z}{dx_1^3} + E f^2 \frac{d^2 g}{dx_1^2} - G \left(\frac{df}{dx_2} \right)^2 g \right\} dA dx_1 = 0 \quad (11)$$

が得られる。

3. 解析結果

図-2 に示す箱型断面の梁が図-3 のように単純支持されて等分布荷重を受けるときのたわみを解析する。本手法に加えてせん断遅れを考慮しない Timoshenko 梁および $f(x_2)$ を放物線分布と仮定した³⁾手法 (以後、Reissner と呼ぶ) でたわみを求めた。これらの手法での解と有限要素解 (以後 FEM と呼ぶ) を比較する。有限要素解には 8 節点 6 面体双 1 次アイソパラメトリック要素を用いて、要素数 61000、節点数 122244 とした。

$w = 20 \text{ mm}$, $h = 10 \text{ mm}$, $\ell = 500 \text{ mm}$, $t_f = t_w = 1.0 \text{ mm}$, $E = 1.0 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0.25$, $q = 1 \text{ N/mm}$ でのたわみ z の橋軸方向分布を図-4, その拡大図を図-5 に示す。FEM との差は本解析や Reissner の方が Timoshenko 梁よりも小さいことがわかる。

FEM に対する各手法における最大たわみの相対誤差を e とする。本解析では $e = 0.15\%$, Reissner では $e = 0.15\%$, Timoshenko 梁では $e = 1.1\%$ となった。このことから、本解析と Reissner は Timoshenko 梁よりも高精度であるといえる。

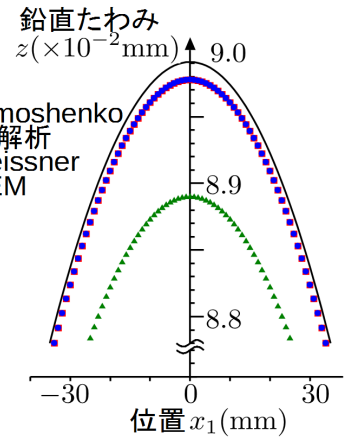


図-5 たわみ分布 (中央)

表-1 誤差の比較

パラメーター		相対誤差 e (%)		
		本解析	Reissner	Timoshenko
断面幅 w (mm)	10	-0.15	-0.15	-0.36
	20	-0.15	-0.15	-1.1
	40	-0.23	-0.23	-4.4
ウェブ板厚 t_w (mm)	0.5	-0.34	-0.34	-1.4
	1.0	-0.15	-0.15	-1.1
	2.0	-0.078	-0.078	-0.93
支間長 ℓ (mm)	100	-21	-21	-31
	500	-0.15	-0.15	-1.1
	1000	-0.043	-0.043	-0.21
ポアソン比 ν	0	-0.43	-0.43	-1.2
	0.25	-0.15	-0.15	-1.1
	0.45	0.089	0.089	-1.0

このモデルを基本に、断面幅，ウェブ板厚，支間長，ポアソン比を変えて精度の検証を行った。それぞれのモデルにおける各手法での e を表-1 に示す。全ての場合において、Timoshenko 梁よりも本解析や Reissner の方が e が小さくなっている。また、断面幅が広い，ウェブが薄い，支間長が短いといった場合には全ての手法において e が大きくなった。Timoshenko 梁は本解析や Reissner と比較すると誤差の増加が大きいことから、これらがせん断遅れの要因となっていることがわかる。

参考文献

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，Ⅰ 共通編，Ⅱ 鋼橋編，2012.
- 2) 齊木功，鍵一彰，山田真幸，瀬戸川敦，岩熊哲夫：非均質 Timoshenko 梁の平均物性評価，応用力学論文集，土木学会，Vol.15, pp.161-169, 2012.
- 3) Reissner, E.: Analysis of shear lag in box beam by principle of minimum potential energy, *Q. Appl. Math.*, 4(3), pp.268-278, 1946.