

近似的 self-consistent 法による異方性複合材料の平均弾性の解析的予測

東北大学工学部 ○学生員 新井 晃朋
 東北大学大学院工学研究科 正員 岩熊 哲夫
 東北大学大学院工学研究科 正員 斉木 功

1. まえがき

現在の航空機や自動車には、軽量で高強度・高耐食性等の特徴を持つことから、繊維補強材料等の複合材料が広く用いられている。土木分野でも繊維強化ポリマーが橋梁の構造部材として使われるようになり、歩道橋の指針¹⁾も出版されている。しかし、その材料開発はメーカーのノウハウに依るところが大きく、橋梁設計者が複合材料を容易に設計できるようにはなっていない。その設計時には、平均挙動の予測を解析的に行えて、なおかつ精度の良い手段があれば便利である。

その解析的平均化手法には森・田中平均等があるが、その中でもいわゆる Hill の self-consistent 予測がある種の最適な解を与えることがある。しかし、対象が異方性を有する複合材料の場合、self-consistent 予測を解析的に用いるのは不可能である。そこで、ここではその近似手法を提案する。

2. 異方性複合材料の 3 相森・田中平均

(1) 3 相森・田中平均

3 相の複合材料の森・田中平均において母材の体積を零にした極限の 2 相体の平均弾性テンソル \bar{C} は

$$\bar{C} = A : B^{-1} \quad (1)$$

と求められる²⁾。ここに $:$ は 4 階のテンソルの積記号を示し、テンソル A, B は

$$A \equiv C_{VM} : \left[I + \sum_{i=1}^2 f_i (S_i - I) : \{ C_{VM} - (C_{VM} - C_i) : S_i \}^{-1} : (C_{VM} - C_i) \right] \quad (2a)$$

$$B \equiv \left[I + \sum_{i=1}^2 f_i S_i : \{ C_{VM} - (C_{VM} - C_i) : S_i \}^{-1} : (C_{VM} - C_i) \right] \quad (2b)$$

で定義される。ここに $f_1 + f_2 = 1$ であり C_{VM} は体積が零の母材 (以下仮想母材) の弾性テンソルである。 C_1, C_2 は実母材と介在物の弾性テンソル、 S_1, S_2 は仮想母材に対する実母材と介在物の Eshelby テンソルであり、 I は単位テンソルである。

等方性複合材料の場合は、上記の 3 相森・田中平均手法の $C_{VM} = \bar{C}$ とすることによって self-consistent 解を得るが、逐次代入法によっても同様の解を得る。それはまず仮想母材 C_{VM} にある適当な剛性を仮定して平均剛性 \bar{C} を求める。その平均剛性 \bar{C} を再度、仮想母材の剛性 C_{VM} に用い平均剛性を計算するといった解析を連続して繰り返す手法である。この繰り返し計算の収束解は self-consistent 平均に一致する。

(2) 異方性複合材料への適用

この逐次代入法では仮想母材はどんな材料でもよく

- あるステップで用いる C_{VM} に制限がなかった
- 実母材と介在物を入替えても同じ平均に収束した

の 2 点に着目し、この方法を異方性を有する複合材料に適用することを考える。しかし、最初のステップで得られた \bar{C} はすでに等方性を有していないことから、それをそのまま直接用いた self-consistent 予測は不可能である。しかし上記のように、 C_{VM} の材料には制限が無いことを踏まえ、ここで得られた \bar{C} を何らかの方法で近似して等方弾性の \bar{C}^{iso} を求め、それをを用いて次の 3 相森・田中平均によって \bar{C} を改善することにした。ただし、等方の場合のように収束するか否かに加えて、 \bar{C}^{iso} をどのように近似するかによっても収束解が異なる可能性がある。そのため収束解ではなく何らかの範囲を与える可能性もあるので、 \bar{C}^{iso} を求める近似は複数試みる必要がある。

3. 異方性平均剛性 \bar{C} の近似法

上述の、異方剛性 \bar{C}^{aniso} を等方剛性 \bar{C}^{iso} へ近似する方法を 3 つ示す。

(1) 行列成分の最小二乗近似 (LS)

2 つの剛性の差の要素の最小二乗法。

$$D \equiv \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 (\bar{C}_{ij}^{aniso} - \bar{C}_{ij}^{iso})^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

(2) 剛性差行列の行列式の最小化 (DET)

異方剛性と等方剛性の差の行列式を最小化する方法。

$$D \equiv \det \left| \bar{C}_{ij}^{aniso} - \bar{C}_{ij}^{iso} \right| \rightarrow \min. \quad (4)$$

Key Words: 複合材料, 異方弾性, 解析的均質化, セルフコンシステント法, 森・田中平均

〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 構造強度学研究室

表-1 材料パラメータ

モデル	実際の母材		非均質体	
	E_M (GN/m ²)	ν_M	E_1 (GN/m ²)	ν_1
CFRP	2.81	0.274	223.0	0.352

(3) 剛性行列の固有値の最小二乗近似 (EIGEN)

\bar{C}^{aniso} の六つの固有値 $3\bar{k}^{\text{aniso}}, 2\bar{\mu}_i^{\text{aniso}} (i = 1, \dots, 5)$ を求めて、その差の最小化で近似すると

$$\bar{\mu}^{\text{iso}} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \mu_i^{\text{aniso}}, \quad \bar{k}^{\text{iso}} = \bar{k}^{\text{aniso}} \quad (5a, b)$$

となる。

4. 結果

解析で対象とする1方向にのみに炭素繊維を並べたCFRPの材料定数を表-1に示す。

最初のステップの仮想母材として母材を用いる場合(図中MT)と介在物を用いる場合(図中MT⁻¹)も比較する。図-1は介在物体積比率 f と繊維方向の平均 Young 率 E_1 の関係で、最初のステップで用いる仮想母材によらず、三つの近似でそれぞれ収束解が唯一に求められた。図中のLS等の記号は前節の3種類の近似の節タイトルに示した記号を参照している。図-2は繊維直角方向の Young 率だがこれも同様である。ただし三つの近似ごとに収束解が異なっているため、self-consistent 解が正確に求められていないことを示しているが、 f が大きい場合にはどの解も MT⁻¹ に漸近し、 f が小さい場合には MT に漸近する。図-1ではそれが判別し難いため図-3に拡大した。この特徴は等方の場合と同様の性質である。森・田中平均は母材と介在物の相互作用を考慮しており、 f が小さい場合は介在物間の相互作用は小さく、 f が大きい場合は実際の母材と介在物を入替えて考えた方が適切であり、その場合母材同士の影響は小さいことから、その性質はモデルの力学的観点からは self-consistent 解として望ましい結果である。そこで、この漸近の程度から3種類の近似度を判定することになると、特に図-3からわかるように、行列式を用いた近似 (DET) の漸近度があまり良くない。元々3種類の近似の中でもこの DET の考え方には無理があった。したがって残りの2種類の近似だけ取り出して比較すると、いずれの図でも差異は非常に小さく、この範囲に self-consistent 解が存在する可能性を示唆していると考えた。

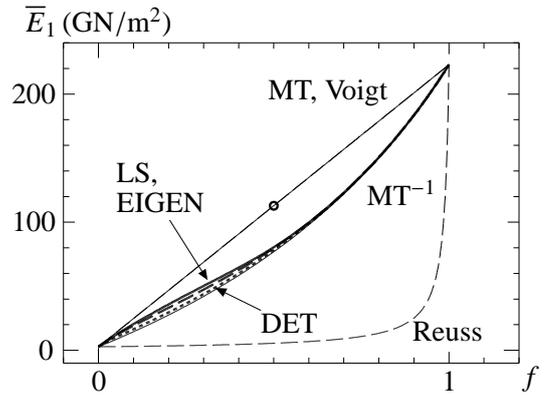


図-1 各手法によるCFRPの平均ヤング率

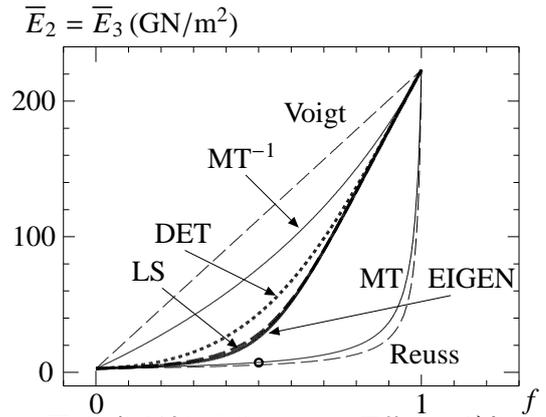


図-2 各手法によるCFRPの平均ヤング率

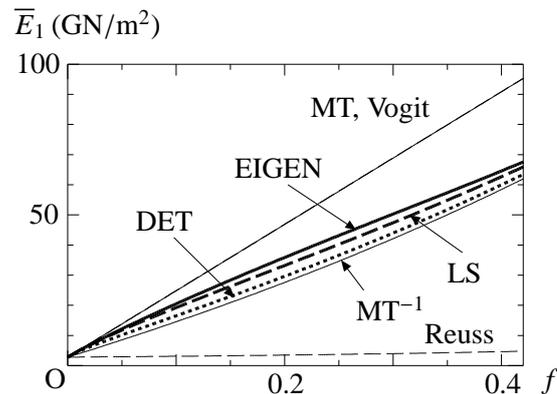


図-3 各手法によるCFRPの平均ヤング率の拡大図

5. まとめ

本論文では異方性複合材料の平均弾性を3相森・田中平均の逐次計算法を用い、3種類の近似解を求めた。逐次近似の最初に用いる仮想母材の剛性に依らない収束解を得られることを示した。しかし3つの近似法ごとに収束解が異なる。その中でより合理的な2つを取り返すと分布範囲の差異が小さいことから、狭い範囲で予測可能である。

参考文献

- 1) 土木学会: FRP歩道橋設計・施工指針(案), 土木学会, 2014.
- 2) 片野俊一, 斉木功, 小山茂, 岩熊哲夫: ハイブリッド複合材料のはく離を考慮した有限要素の開発, 土木学会応用力学論文集, Vol.12, pp.299.310, 2009.