

# 地盤材料の繰返し変形に対する回転硬化下負荷面 Cam-clay モデルの適用性検証

東北大学 学生会員 ○ 大塩雅人  
 東北大学 正会員 山川優樹  
 東北大学 非会員 千田大  
 東北大学 フェロー会員 池田清宏

## 1. はじめに

有限変形・移動硬化弾塑性モデルの枠組みには、客観速度を用いて背応力の発展則を与える定式化と、塑性変形勾配テンソルの乗算分解  $\mathbf{F}^P = \mathbf{F}^{Pe} \mathbf{F}^{Pd}$  を用いた定式化の二つの系統がある。このうち前者の枠組みに基づくモデルの一部では、問題点が報告されており、近年金属材料分野を対象として、後者の枠組みにおける研究が進行している。

一方、地盤材料は、降伏応力の拘束圧依存性、塑性圧縮性、ダイレタンシー挙動、繰返し塑性変形において見られるサイクリックモビリティなど、金属材料には見られない複雑な挙動を示す。また、塑性変形に伴う誘導異方性が強く発現する材料であるため、こういった性質を表現できるモデル<sup>1)</sup>が必要とされている。

千田ら<sup>2)</sup>はこういった背景をもとに、誘導異方性を表現可能な有限変形の弾塑性モデルを提案した。このモデルは、下負荷面 Cam-clay モデルに対して、塑性変形勾配テンソルの乗算分解の枠組みに基づいて、回転硬化則を導入したモデルである。本研究では、この構成モデルについて、地盤材料の繰返し変形挙動（サイクリックモビリティ）への適用性を検証する。さらに、サイクリックモビリティをより適切に表現し得るように、モデルを拡張する。

## 2. 構成モデル諸式の定式化

サイクリックモビリティを適切に表現し得るように、千田らによるモデル<sup>2)</sup>を等方硬化則ならびに正規降伏比  $R$  の発展則について拡張する。以下では、構成モデル諸式のうち、等方硬化則ならびに正規降伏比  $R$  の発展則に限定して記述する。弾性構成則、回転硬化則、下負荷面関数、塑性発展則などは文献<sup>2)</sup>を参照されたい。

### (1) 等方硬化則

Cam-clay モデルでは、一般に塑性体積ひずみによる等方硬化/軟化を表現する。

Kirchhoff 平均垂直応力  $p^* := \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\tau}$  と Mandel 平均垂直応力  $\bar{P} := \frac{1}{3} \text{tr} \bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{3} \text{tr} (\bar{\mathbf{C}}^e \bar{\mathbf{S}})$  が等しいことから、 $\ln v - \ln p^*$  関係<sup>3)</sup>に基づいて式 (1) の等方硬化則が導かれる。

$$\bar{P}_c = \bar{P}_{c0} (J^P)^{-\Phi} \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 $\Phi := 1/(\Lambda^* - K^*)$  と定義した。 $\Lambda^*$  は弾塑性圧縮指数、 $K^*$  は弾性圧縮指数である。また、 $J^P = \det \mathbf{F}^P$  は塑性体積変化、 $\bar{P}_c$  は圧密降伏応力、 $\bar{P}_{c0}$  は基準状態での  $\bar{P}_c$  の値である。式 (1) を時間微分すると次式を得る。

$$\dot{\bar{P}}_c = -\frac{1}{\Lambda^* - K^*} \bar{P}_c \dot{\varepsilon}_v^P \dots \dots \dots (2)$$

式 (2) を見ると、 $\bar{P}_c \leq 0$ 、 $\Lambda^* - K^* > 0$  なので、塑性体積圧縮時 ( $\dot{\varepsilon}_v^P < 0$ ) には等方硬化 ( $\dot{\bar{P}}_c < 0$ ) を、塑性体積膨張時 ( $\dot{\varepsilon}_v^P > 0$ ) には等方軟化 ( $\dot{\bar{P}}_c > 0$ ) を示すことは明らかである。本論文では、塑性偏差ひずみによる硬化/軟化（以降、偏差硬化/軟化）も考慮し得るように、式 (2) を拡張する。式 (2) に塑性偏差ひずみ  $\varepsilon_s^P$  項を追加した次式を定義する。塑性対数ひずみの体積・偏差不変量  $\varepsilon_v^P$ 、 $\varepsilon_s^P$  は  $\mathbf{F}^P$  を極分解して得られる塑性ストレッチテンソル  $\mathbf{U}^P$  により  $\varepsilon_v^P = \text{tr}(\ln \mathbf{U}^P)$ 、 $\varepsilon_s^P = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\ln \mathbf{U}^P\|_{\text{dev}}$  と定義される。

$$\dot{\bar{P}}_c = -\frac{1}{\Lambda^* - K^*} \bar{P}_c \dot{\varepsilon}_v^P + h_s(\bar{\chi}) \dot{\varepsilon}_s^P \dots \dots \dots (3)$$

$h_s$  は次式で定義する正規化応力比  $\bar{\chi}$  の関数である。

$$\bar{\chi} := \frac{\bar{Q}}{M_d(-\bar{P})} \dots \dots \dots (4)$$

$M_d$  は偏差硬化/軟化の境界となる応力比（定数）である。正規化応力比  $\bar{\chi}$  が 1 より大きい小さいかで偏差硬化/軟化を分ける。これは砂質材料で見られる典型的な挙動である。この挙動は次式のようなになる。

$$\begin{cases} h_s(\bar{\chi}) < 0 \text{ for } \bar{\chi} > 1 \rightsquigarrow \text{偏差硬化} \\ h_s(\bar{\chi}) = 0 \text{ for } \bar{\chi} = 1 \rightsquigarrow \text{偏差硬化/軟化生じず} \\ h_s(\bar{\chi}) > 0 \text{ for } \bar{\chi} < 1 \rightsquigarrow \text{偏差軟化} \end{cases} \dots \dots \dots (5)$$

式 (5) の性質を持つ関数の最も簡単なものとして、ここでは次式を用いる。

$$h_s(\bar{\chi}) = -h_{s1}(\bar{\chi} - 1) \dots \dots \dots (6)$$

ここで、 $h_{s1}$  は偏差硬化係数であり、 $h_{s1} = 0$  とすれば塑性偏差ひずみによる硬化/軟化は生じず、式 (1) の等方硬化則と同じ挙動を示す。

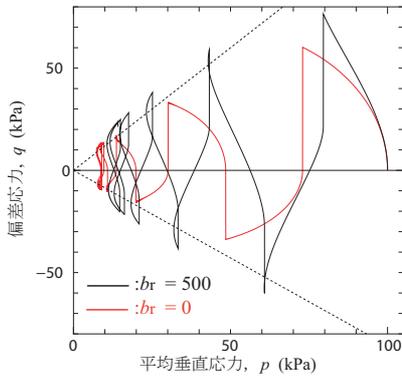


図-1 回転硬化発展係数  $b_r$  による挙動の違い ( $p$ - $q$  平面)

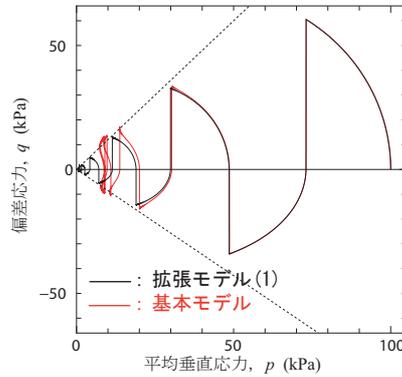


図-2  $R$  の発展則による挙動の違い ( $p$ - $q$  平面)

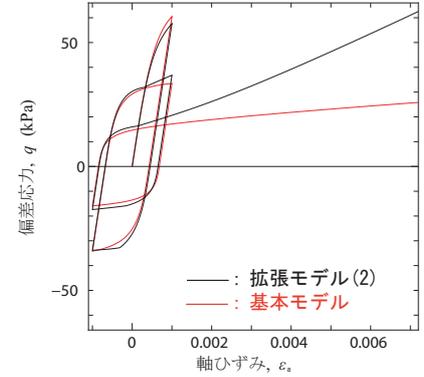


図-3 偏差硬化/軟化の導入による挙動の違い ( $\epsilon_a$ - $q$  曲線)

## (2) 正規降伏比 $R$ の発展則

従来の正規降伏比  $R$  の発展則を式 (7) に示す.

$$\dot{R} = \lambda U(R), \quad U(R) = u \cot\left(\frac{\pi}{2} \frac{R - R_e}{1 - R_e}\right) \dots\dots\dots (7)$$

ここで,  $u > 0$  は発展係数,  $\langle \cdot \rangle$  は Macaulay の括弧,  $R_e$  ( $0 < R_e < 1$ ) は弾性限界を規定する定数である. 本論文では, 正規降伏比  $R$  の発展則を平均垂直応力  $\bar{P}$  に依存する形に拡張する. 式 (7) を次式 (8) のように拡張することで, 拘束圧が小さいときほど  $R$  の発展が緩慢になる.  $\bar{P}_0$  は基準状態における平均垂直応力である.

$$\dot{R} = \lambda U(R, \bar{P}), \quad U(R, \bar{P}) = u \left(\frac{\bar{P}}{\bar{P}_0}\right)^2 \cot\left(\frac{\pi}{2} \frac{R - R_e}{1 - R_e}\right) \dots\dots\dots (8)$$

## 3. 数値解析例

六面体一次要素 (HEXA8,  $2 \times 2 \times 2$  点完全ガウス積分) を用いて, 単一要素の繰返し三軸圧縮/伸張の解析を行う. 初期応力は  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -100$  kPa の等方状態として, 非排水条件を考慮して体積一定に保つ. また,  $\sigma_{33}$  方向について圧縮/伸張方向の変位制御により解析を行い, 変位は, 対称一定の両振幅 (公称ひずみ  $\pm 0.1\%$ ) で与えた. 解析開始時は  $\mathbf{F}^p = \mathbf{F}^{pe} = \mathbf{F}^{pd} = \mathbf{I}$  とし, 初期状態では回転硬化が生じていない設定とした. また, 初期状態の正規降伏比  $R_0 = 1.0$  と, 正規圧密状態を想定した. 材料定数として, せん断弾性係数  $\mu_0 = 35.5$  MPa, せん断弾性係数の圧力依存係数  $\alpha = 0$ , 限界状態定数  $M_{TC} = 1.20$ , 弾性圧縮指数  $K^* = 1.3 \times 10^{-3}$ , 弾塑性圧縮指数  $\Lambda^* = 7.0 \times 10^{-3}$ , 回転硬化発展係数  $b_r = 5.0$ , 回転硬化限界定数  $M_r = 0.8$ , 下負荷面の発展係数  $u = 5.0$ , Lode 角依存係数 (下負荷面関数)  $\rho_f = 0.71429$ , Lode 角依存係数 (塑性ポテンシャル関数)  $\rho_g = 0.71429$  を用いた.

以降, Cauchy 平均垂直応力を  $p := \frac{1}{3} \text{tr}[\boldsymbol{\sigma}]$ , 偏差応力を  $q := \sigma_{11} - \sigma_{33}$  と定義する. 軸ひずみ  $\epsilon_a$  は圧縮/伸張方向の対数ひずみを用いる. また, 等方硬化則に一般的な Cam-clay モデルの式 (1) を用い,  $R$  の発展則に式 (7) を用いたものを, 「基本モデル」とする.

回転硬化発展係数  $b_r = 0, 500$  のときの解析結果を図-1 に示す.  $b_r = 500$  と回転硬化の発達程度を大きくすると, 応力ループがより顕著に見られる. つまり応力ループの表現には, 回転硬化の影響が大きいことがわかる.

正規降伏比の発展則として, 式 (8) を導入したモデル (以降, 拡張モデル (1)) の解析結果を図-2 に示す. 従来の発展式を用いている基本モデルでは  $p = 0.01$  近傍で収束しているが, 拡張モデル (1) は,  $p$  が  $0.0$  近傍まで低減している. これより,  $R$  の発展則として式 (8) を導入することで,  $p$  が  $0.0$  近傍まで減少する挙動を表現することができた.

等方硬化則に塑性偏差ひずみによる硬化/軟化挙動を取り入れたモデル (以降, 拡張モデル (2)) の検証を行う. 偏差硬化/軟化に関する材料定数として,  $M_d = 0.8$ ,  $h_{s1} = 50000$  kPa を用いる. 2 サイクルの変位を与えた後に, 変位の振幅を大きくしたときの解析結果を図-3 に示す. 基本モデルでは勾配が緩やかに上昇する挙動を示すが, 拡張モデル (2) は徐々に勾配が大きくなり, 下に凸の曲線を描いている. これより, 等方硬化則に偏差硬化/軟化を導入することで, 基本モデルでは表現できない, せん断に伴う剛性回復を表現することができた.

## 参考文献

- 1) 橋口公一, 間瀬辰也: 下負荷面モデルによるサイクリックモビリティの物理的解釈と定量的表現. 地盤工学ジャーナル vol. 6, No. 2, pp. 225-241, 2011.
- 2) 千田大, 山川優樹, 橋口公一, 池田清宏: 塑性変形勾配テンソルの乗算分解による有限変形・異方性回転硬化下負荷面 Cam-clay モデル. 応用力学論文集 vol. 16, pp. 255-266, 2013.
- 3) Hashiguchi, K.: On the linear relations of  $V - \ln p$  and  $\ln v - \ln p$  for isotropic consolidation of soils. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, vol. 19, pp. 367-376, 1995.