

○東北大学工学部	学生員	干場 大也
東北大学災害科学国際研究所	正 員	加藤 準治
東北大学災害科学国際研究所	正 員	高瀬 慎介
東北大学災害科学国際研究所	正 員	寺田 賢二郎
東北大学大学院工学研究科	正 員	京谷 孝史

1. はじめに

本研究は、複合材料の塑性挙動を考慮したトポロジー最適化手法の開発を目的とする。複合材料は土木工学分野において必要不可欠な材料といえるが、塑性材料を組み合わせたような複雑な非線形性を示す構造を経験的に設計することは困難である。そこで、材料非線形性を考慮した構造最適化により、複合材料の力学的挙動を制御して定量的に最適な材料配置を決定するための手法を提案する。現在、塑性材料のための感度解析法として調和弾塑性剛性テンソルの感度を求める手法が知られている¹⁾。しかし、本研究では問題の経路依存性を反映するために、増分解析および応力積分法に即した新たな感度解析手法を選択した。ここでは、その手法により精緻な感度が得られることを比較検証によって示した上で、塑性変形を示すような構造および荷重条件を想定し、複雑な非線形領域下での最適化計算例を紹介する。

2. 設計変数および最適化問題の設定

本研究ではトポロジー最適化のために材料表現法を用いる。有限要素メッシュで離散化された i 番目の要素について、設計変数 s_i を次のように表す。

$$s_i = \frac{r_i}{r_0} \quad 0 \leq s_i \leq 1 \quad (1)$$

図-1 で示すように、 r_0 はある有限要素高さ、 r_i は要素内の phase-2 の高さである。

目的関数を $f(\mathbf{s})$ 、等式制約条件を $h(\mathbf{s})$ と表す。ここで $\mathbf{s}$ は、設計変数ベクトルである。 $\mathbf{s}$ について、使用材料体積 $\hat{V}$ が一定の下で、変位制御点に対する仕事量、つまり構造が受け持つエネルギーを最大にする最適化問題は次のように設定される。

$$\text{minimize} \quad f(\mathbf{s}) = - \int_{\Omega} \int_{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \quad (2)$$

$$\text{subject to} \quad h(\mathbf{s}) = \int_{\Omega} s_i \, d\Omega - \hat{V} = 0 \quad (3)$$

ここで $\boldsymbol{\sigma}$ はコーシー応力テンソル、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は線形ひずみテンソルである。

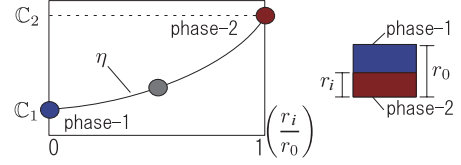


図-1 2層材料最適化の概念

3. 塑性材料モデル

本研究では、速度非依存型の等方性線形硬化則を仮定し、von Mises の塑性モデルを用いる。降伏関数 Φ および硬化関数 k を次のように与える。

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}', \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' - \frac{1}{3} k^2 (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \quad (4)$$

$$k(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sigma_y + E^h \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (5)$$

ここで $\boldsymbol{\sigma}'$ は偏差応力テンソル、 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ は相当塑性ひずみ、 σ_y は初期降伏応力、 E^h は硬化係数である。

次に、設計空間における解の不連続性を内挿関数によって正則化する。弾性剛性テンソル $\mathbb{C}$ および塑性パラメータ E^h 、 σ_y について、図-1 に示す 2 層材料最適化の概念を用いて以下のように設定する。

$$\mathbb{C} = (1 - s_i^\eta) \mathbb{C}_1 + s_i^\eta \mathbb{C}_2 \quad (6)$$

$$E^h = (1 - s_i^\eta) E_1^h + s_i^\eta E_2^h \quad (7)$$

$$\sigma_y = (1 - s_i^\eta) \sigma_{y1} + s_i^\eta \sigma_{y2} \quad (8)$$

ここで、2 材料の材料定数を添え字 1, 2 によって区別している。 η は物理的意味を保証しないべき乗数である。

4. 感度解析手法およびその精度検証

本研究では最適化規準法による最適化アルゴリズムを用いるため、 $\partial f / \partial s_i$ 、 $\partial h / \partial s_i$ を求める必要がある。以下で、簡単のため $\partial / \partial s_i = \nabla_s$ と表記する。目的関数の感度について、荷重が変位制御点にのみ作用する場合に限定することで陰的な微分項である $\nabla_s \boldsymbol{\varepsilon}$ を消去することができ、その結果、以下のように $\nabla_s \boldsymbol{\sigma}$ さえ求めれば容易に全体の感度が求まる式に帰着する。

$$\nabla_s f = - \int_{\Omega} \int_{\varepsilon} (\nabla_s \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \quad (9)$$

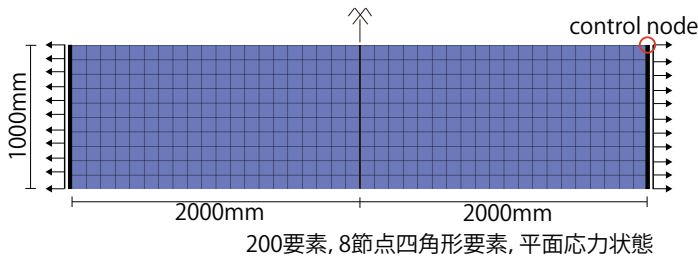


図-2 構造最適化モデル

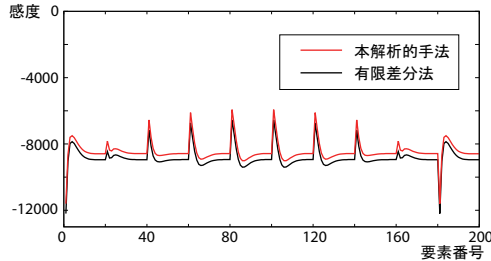


図-3 感度解析の精度検証

また, $\nabla_s \sigma$ については, 弾塑性構成則や発展則を増分ステップによる漸化式で表したものと, 増分解析法である return mapping における試行応力と最終応力の関係式を設計変数で微分することで定式化する. 式 (9) の誘導および $\nabla_s \sigma$ の導出過程の詳細については, 文献²⁾を参照されたい.

本手法によって得られた感度を以下の有限差分法の式に従って得られた感度と比較し, その精度を検証する.

$$\nabla_s f = \frac{f(s + \Delta s) - f(s)}{\Delta s_i} \quad (10)$$

式 (10) は計算量が膨大になるため実用には向かないが, その単純な原理から感度の正しさはある程度保証され, ここではベンチマークとして用いられる. 本検証例で用いる解析条件を図-2に示す. ただし, ここでは対称性より左半分を解析対象とし, 材料定数は表-1のものをを用いる. それぞれの感度解析法によって得られた要素毎の初期感度を図-3に示す. 図-3より, それぞれの感度が描く曲線はおおよそ一致しており, 本手法による感度解析は高い精度を有するといえる.

5. 最適化数値計算例

本手法を用いた最適化数値計算例を紹介する. 表-1に示す材料定数は低降伏点鋼 (塑性材料 1) および超々ジュラルミン (塑性材料 2) を参考に設定しており, 図-4に示すように, それぞれの応力-ひずみ曲線が交差するような複雑な非線形複合材料となっている. この材料を用いて, 図-2に示す要素に 1N の等分布荷重を右方向に作用させ, 100 ステップの増分解析を行う. 変位制御法により図中赤丸で示した節点の変位を制御するが, ここで変位制御点の総変位量をそれぞれ 1.0mm, 100mm に設定し, 最適化を行った. 図-5, 図-6 はそれぞれの最適化結果であり, 左半分は最適

表-1 数値計算例に用いた使用材料

	塑性材料 1	塑性材料 2
ヤング係数 (GPa)	210	72
ポアソン比	0.3	0.3
硬化係数 (MPa)	400	1600
初期降伏応力 (MPa)	100	505

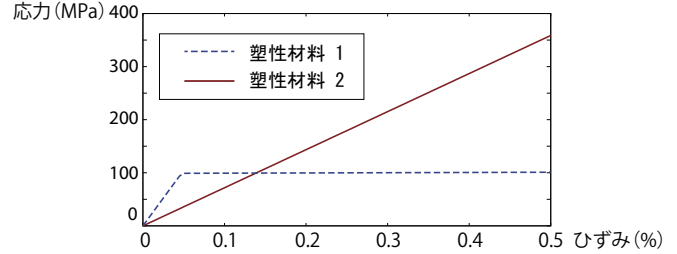


図-4 使用材料の応力-ひずみ曲線

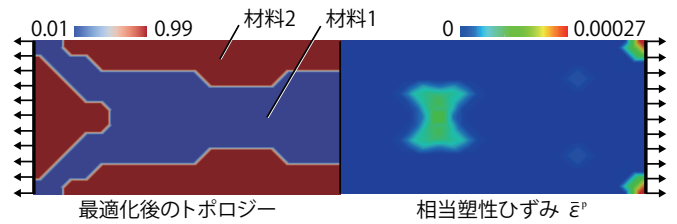


図-5 総制御変位量 1.0mm の最適化結果

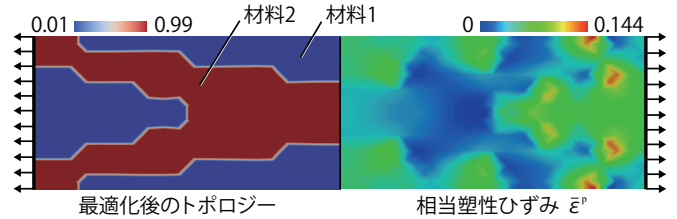


図-6 総制御変位量 100mm の最適化結果

化後のトポロジー, 右半分は相当塑性ひずみを示している. これより, 感度に反映される塑性変形の度合いによって異なるトポロジーが得られていることがわかる.

6. まとめ

本論文において, 合理的な設計が困難な複合材料のために, トポロジー最適化を用いたひとつの設計手法を提案した. 感度解析の精度検証において, 増分解析に即して導いた感度と有限差分法による感度がおおよそ一致したことから, 本研究における感度解析および最適化計算が確かな精度を持つことを示した. その上で, 最適化数値計算例において, 複雑な材料非線形性を持つ複合材料の設計にあたり, 本手法を用いることで力学的に理にかなった材料配置を定量的に決定し得ることを示した. これらの結果は本研究の目的を満足するものである.

参考文献

- 1) Stefan Schwarz, Kurt Maute, Ekkehard Ramm : Topology and shape optimization for elastoplastic structural response, *Comput. Appl. Mech. Engrg.* 190(2001)2135-2155
- 2) 干場大也, 加藤準治, 高瀬慎介, 寺田賢二郎, 京谷孝史, 弾塑性複合材料のトポロジー最適化および解析的感度の精度検証, 日本計算工学会論文集, to be submitted.