

増分弾塑性構成則に用いる応力速度の特性の整理

東北大学大学院工学研究科 学生員 ○荒川 淳平
東北大学大学院工学研究科 正 員 岩熊 哲夫
東北大学大学院工学研究科 正 員 斉木 功

1. まえがき

有限変形の枠組みにおける増分弾塑性構成則には客観性を有した応力速度を用いる必要があり、一般に Cauchy 応力の Jaumann 速度が広く用いられているが、必ずしもそれを用いなければならない規準は無い。一方、変形の局所化の解析的解に対しては、この応力速度の選択が少なからず影響することも分かっている。そこで本論文では、局所化解析に基づいて客観的応力速度の持つ特性を分類し、増分型構成則に適した応力速度を選び出す提案をする。

2. 構成モデルと応力速度

弾塑性構成則を定式化する場合、変形速度は弾・塑性成分に加算分解して表すことがある。弾性成分は増分型の Hooke 則に従い、塑性成分は塑性ポテンシャル g を用いた流れ則を満足するとして定義すると

$$d_{ij} = d_{ij}^e + d_{ij}^p \quad (1)$$

$$d_{ij}^e \equiv \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3\kappa} - \frac{1}{2\mu} \right) \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk} \quad (2)$$

$$d_{ij}^p \equiv \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3)$$

のようになる。ここで、 $\dot{\sigma}$ は客観性を有する任意の応力速度、 μ はせん断弾性係数、 κ は体積弾性係数、 δ_{ij} は Kronecker のデルタ、 λ は塑性乗数である。

一般に、任意の客観的応力速度に $d_{ik}\sigma_{kj} + d_{jk}\sigma_{ki}$ や $d_{kk}\sigma_{ij}$ を実数倍した項を加算したものもまた客観性を有する¹⁾ことから、本論文では、式 (2) における客観的応力速度を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}^* \equiv & \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}\sigma_{kj} - w_{jk}\sigma_{ki} \\ & - n_1 (d_{ik}\sigma_{kj} + d_{jk}\sigma_{ki}) - n_2 d_{kk}\sigma_{ij} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで w はスピン、 n_1 および n_2 は実数である。代表的な応力速度として Jaumann 速度 ($n_1 = n_2 = 0$)、Truesdell 速度 ($n_1 = 1, n_2 = -1$)、Oldroyd 速度 ($n_1 = 1, n_2 = 0$)、convected 速度 ($n_1 = -1, n_2 = 0$) がある。

結局、式 (1) ~ (4) および降伏条件より増分弾塑性構成則は次式のように表現できる。

$$\dot{\sigma}_{ij}^* = C_{ijkl}^{\text{ep}} d_{kl} \quad (5)$$

ここに C^{ep} は弾塑性接線係数である。

3. 局所化規準

本論文では、客観的応力速度を扱う枠組みの中で、耐荷力解析に用いられる規準のひとつである変形の局所化条件を対象とする。有限変形理論に基づく局所化規準として Hill and Hutchinson²⁾ のモデルを用いることとする。ここでは、nominal 応力速度 $\dot{n}$ と速度勾配 ∇v が

$$\dot{n}_{ij} = F_{ijkl} v_{k,l} \quad (6)$$

のように関係付けられるとすると、表面力の連続条件等から結局次式が成立したときに局所化が発生する。

$$\det(\nu_i F_{ijkl} \nu_l) = 0 \quad (7)$$

ここで ν はせん断帯の単位法線ベクトルである。

4. 局所化解析の結果

本論文では、規準式 (7) を満足する正と負の応力の絶対値の最小をそれぞれ引張と圧縮における局所化発生応力 σ_{cr} と定義する。また一般的な鋼材料を対象とし、材料定数の Young 率 $E = 207 \text{ GN/m}^2$ 、Poisson 比 $\nu = 0.3$ と設定した。

(1) 塑性的平面ひずみの場合

本論文では、塑性的な平面ひずみ状態を $d_{33}^p \equiv 0$ の場合、つまり $\sigma'_{33} = 0$ の場合で定義し、せん断帯角度は $\tan \theta \equiv \nu_1/\nu_2$ とする。 $\sigma_{11} = \sigma_0$ の様な載荷状態にある場合に、Jaumann 速度と Truesdell 速度に関して規準式 (7) を満足する応力とせん断帯角度の関係を図-1 に示す。これより、いずれの応力速度でも $H/\mu \leq 0$ において $\sigma_0 = 0$ の解が存在することが確認できる。特に、 $H/\mu = 0$ における局所化応力 ($\sigma_{\text{cr}} = 0$) に対応するせん断帯角度 ($\theta = 45^\circ$) は、微小変形理論の枠組みから求められる角度に一致する。なお、本ケースにおいて局

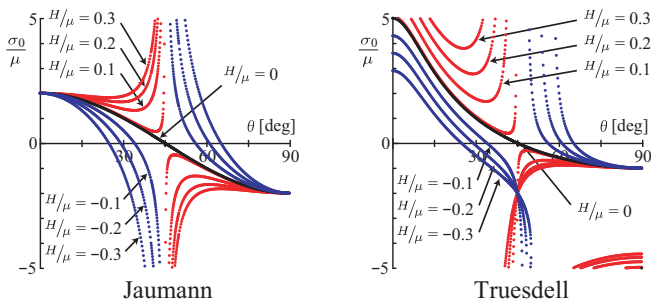


図-1 応力とせん断帯角度の関係（塑性的平面ひずみ）

所化応力が非零となるのは，構成則に用いる応力速度に関係無く $H/\mu > 0$ の場合である．

次に，局所化発生応力とせん断帯角度の結果に及ぼす硬化パラメタ H/μ の影響を図-2 に示す．違いが n_2 の

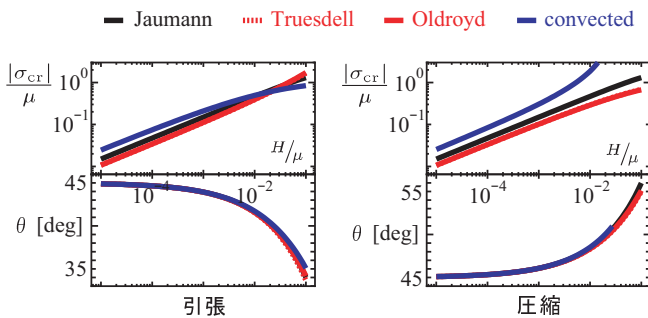


図-2 硬化パラメタの影響（塑性的平面ひずみ）

有無である Truesdell 速度と Oldroyd 速度は，その他の応力速度と比較して互いに非常に類似した結果となった．局所化応力に関しては，いずれも $H/\mu \approx 10^{-3}$ 以上でせん断弾性係数の $1/10$ 倍程度と大きな応力レベルとなってしまうが， H/μ が非常に小さい範囲では $n_1 > 0$ の応力速度が他と比べ小さくなり，特に圧縮ではそれらは Jaumann 速度の $2/3$ 程度となる．一方，せん断帯角度に関してはいずれの応力速度も類似した結果を示した．

(2) 軸対称応力状態の場合

载荷状態は k を実数とし $\sigma_{22} = \sigma_{33} \equiv k\sigma_{11}$ の場合，せん断帯角度は $\tan \theta \equiv \nu_1/\sqrt{2\nu_2}$ と定義する．なお，本ケースにおいて局所化応力が非零となるのは，構成則に用いる応力速度に関係無く $H/\mu > -(1+\nu)/6$ の場合となった．

例として $k = -0.5$ と $k = 0$ の場合における局所化応力とせん断帯角度の結果に及ぼす硬化パラメタ H/μ の影響を図-3 に示す．対数軸表示するため横軸は $H/\mu + (1+\nu)/6$ にとった．局所化応力に関しては，用いる応力速度によって程度は違うが， $H/\mu > 0$ の場合局所化発生時に非常に大きな応力状態となってしまう．また，硬

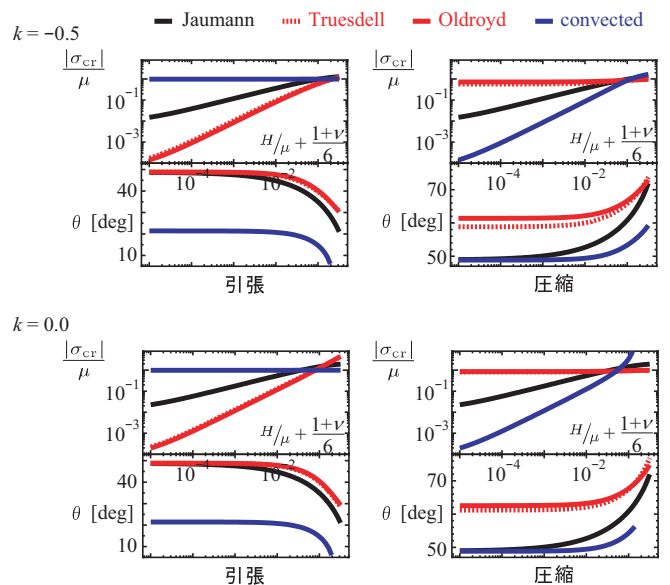


図-3 硬化パラメタの影響（軸対称応力状態）

化パラメタが小さな範囲では，引張で $n_1 > 0$ ，圧縮で $n_1 < 0$ の応力速度が Jaumann 速度に比べ 1 ～ 2 桁程小さい現実的な応力レベルで予測できている．また，前節と同様に n_2 の結果に及ぼす影響の違いは n_1 に比べ非常に小さかった．一方，せん断帯角度に関しては，塑性的平面ひずみの場合ほど各結果が接近することではなく，特に $H/\mu = 0$ の場合，引張で $n_1 > 0$ の応力速度，圧縮では Jaumann 速度が Hill³⁾ の微小変形理論における理論値 35.3° ， 54.7° にそれぞれ近い値になった．

5. おわりに

増分弾塑性構成則を用いた変形の局所化解析において，塑性的平面ひずみでは $n_1 > 0$ の応力速度を用いた場合の局所化応力が他と比べ小さく，せん断帯角度の予測も $H/\mu = 0$ の場合微小変形理論のそれと一致した．また軸対称応力状態では， $n_1 \neq 0$ の応力速度が引張か圧縮によって Jaumann 速度よりも小さな応力レベルとなる．一方， n_2 の影響は n_1 に比べて非常に小さいことが分かった．

以上から，式 (4) で定義した応力速度における n_1 が解析結果に大きな影響を及ぼすことから， n_1 を選ぶことで Jaumann 速度よりも構成則に用いるのに適した応力速度になり得ることが明らかとなった．

参考文献

- 1) 北川浩: 塑性力学の基礎, 日刊工業新聞社, 1979.
- 2) Hill, R. and Hutchinson, J. W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.239-264, 1975.
- 3) Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford Classic Texts in the Physical Sciences, Clarendon Press, 1998.