

複合材料の分離型マルチスケール解析手法を適用した 3次元ミクロ構造トポロジー最適化

○東北大学工学部建築・社会環境工学科 学生会員 谷地 大舜
東北大学災害科学国際研究所 正会員 加藤 準治
東北大学災害科学国際研究所 正会員 寺田 賢二郎
東北大学工学研究科 正会員 京谷 孝史

1. はじめに

複合材料の力学的挙動は、材料のミクロ領域における幾何学的特性、例えば材料配置や形状、寸法に依存し、この依存性は非線形領域において顕著になることが知られている。よって、ミクロ構造の幾何学的特性を最適化することでマクロ構造の力学的パフォーマンスを最大限に引き出すことが期待される。近年、材料のミクロ領域における特性を制御できる生産技術が現実のものとなりつつあるという背景も踏まえ、本研究ではミクロ構造の材料配置（ここではトポロジー）を最適化することでマクロ構造の剛性を最大にするための手法を提案する。また、このようなミクロマクロ連成問題を解くためには、均質化法に基づいたマルチスケール手法の導入が必要である。本研究では、ミクロおよびマクロの境界値問題を個別に解くことで計算コストを減少させる「分離型マルチスケール解析法」を用いた3次元ミクロ構造のトポロジー最適化手法を提案する。

2. 分離型マルチスケール解析手法

分離型マルチスケール解析手法¹⁾は、ミクロマクロ2変数境界値問題を同時にカップリングしながら解く一般的な手法と異なり、2変数境界値問題をミクロおよびマクロ個々の境界値問題に分離して解く手法である。まず、ミクロ境界値問題については、均質化法を基本として周期的なミクロ構造（ユニットセル）を取り出し、それを数値的な供試体とみなして材料実験を模擬する。そして、ここで得られたミクロ解析結果をマクロな材料変数に変換することで、マクロ材料応答を計測したものとする。本研究では線形弾性体を想定しているため、ミクロ解析で得られるミクロ応力 σ からマクロ応力 Σ を計算し、それをマクロ材料剛性 $\mathbb{C}^H$ に変換する。そして、得られたマクロ材料剛性を直接用いてマクロ境界値問題を解くこととなる。

3. 最適化問題の設定

最適化問題は、一般に目的関数 $f(\mathbf{s})$ 、制約条件を与える等式制約関数 $\mathbf{h}(\mathbf{s})$ と不等式制約関数 $\mathbf{g}(\mathbf{s})$ で定義される。 $\mathbf{s}$ は、設計変数 s_i を列に並べたもの、すなわち設計変数ベクトルを意味する。

以下に本研究で取り扱う最適化問題の定式化を行う。目的関数はマクロ構造の剛性最大化であり、これをコンプライアンス最小化と等価であるとして以下のような定式化を

行った。ユニットセルは2種類の異なる材料で構成されるものとし、それらを phase-1, phase-2 と呼ぶ。制約条件についてはユニットセル内にある phase-2 の体積はユニットセル全体で最適化計算中でも変化しないという等式制約条件を与えた。本最適化問題では、2種類の材料しか存在しないものと設定しているため、phase-1 の体積も同時にユニットセル全体で変化しないことを意味し、更には構造全体で一つのユニットセルを共有するため、マクロ構造全体でも個々の材料の体積は変化しない。

$$\min f(\mathbf{s}) = \mathbf{F}^T \mathbf{d} \quad (1)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{s}) = \int_Y s_i dY - \hat{V} = 0 \quad (2)$$

$$s_L \leq s_i \leq s_U \quad i = 1, \dots, n_s \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{F}$ および $\mathbf{d}$ はそれぞれマクロ構造全体系の外力ベクトルと節点変位ベクトルである。また、 s_L および s_U は設計変数の下限と上限値、 n_s は設計変数の数でここではユニットセル内の有限要素の数と一致する。 $\hat{V}$ についてはユニットセル内における所与の phase-2 材料の総体積である。

本研究では勾配法による最適化アルゴリズムである OC 法²⁾を用いるため、2変数境界値問題を解いた後に目的関数と制約関数の設計変数 s_i に関する感度 $\partial f / \partial s_i$, $\partial h / \partial s_i$ を求める必要がある。ここで得られた感度を最適化アルゴリズムへ組み込み、その時点での最適解を求め、その解が収束するまで繰り返し計算を行う。

4. 感度解析

目的関数 f の設計変数 s_i に関する感度は随伴法を用いて以下のように表すことができる。

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = -\mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial s_i} \mathbf{d} \quad (4)$$

$$= - \int_{\Omega} \mathbf{E}^T \frac{\partial \mathbb{C}^H}{\partial s_i} \mathbf{E} d\Omega \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{K}$ はマクロ構造全体の剛性マトリックス、 $\mathbf{E}$ はマクロひずみでマクロ構造解析を実行することによって得られるものである。 $\mathbb{C}^H$ は数値材料試験で得られるものであるため、式(5)はミクロおよびマクロ構造の影響を同時に考慮した感度式であるといえる。

表-1 Material data

	ヤング係数 (N/mm ²)	ポアソン比
phase-1	10	0.3
phase-2	10000	0.3

等式制約条件式 (2) は、変位 $\mathbf{d}$ に依存しないため、その感度は次式で示すとおり、陽的に簡単に求めることができるものとなる。

$$\frac{\partial h}{\partial s_i} = \int_Y dY \quad (6)$$

5. 最適化計算例

5.1 解析モデル

本研究で提案する分離型マルチスケール解析手法によるマイクロ構造トポロジー最適化の計算例を紹介する。

解析するモデルの概念図を図-1に示す。マクロ構造は、1辺 1000mm の立方体 1 要素としてモデル化し、xy 方向に単純せん断変形を与えるものとする。この際、z 方向については変位拘束をする。マイクロ構造内の使用材料については 2 種類 (2 層複合材料) とし、空隙は存在しないものと仮定した。ここで、phase-2 (黒) の材料剛性は phase-1 (白) のそれよりも大きいものとして設定している。使用材料はすべて線形モデルとし、その材料定数を表-1 に記す。ユニットセルの形状は、2 ケース用意し (a) は奥行き (z 方向に) 1 要素のプレート型、(b) は立方体とし、どちらも一辺の長さは正規化して単位長さとした。使用した有限要素は 8 節点六面体要素で、要素数は (a) 400 (20 × 20 × 1)、(b) 1000 (10 × 10 × 10) である。最適化前の初期状態ではいずれの有限要素に phase-1 と phase-2 がそれぞれ 50% ずつ含まれるものとした。そのため、設計変数の初期値はすべての要素で $s_i = 0.5$ である。この構造に含まれる材料の総体積は最適化計算中も変化しないものとする。

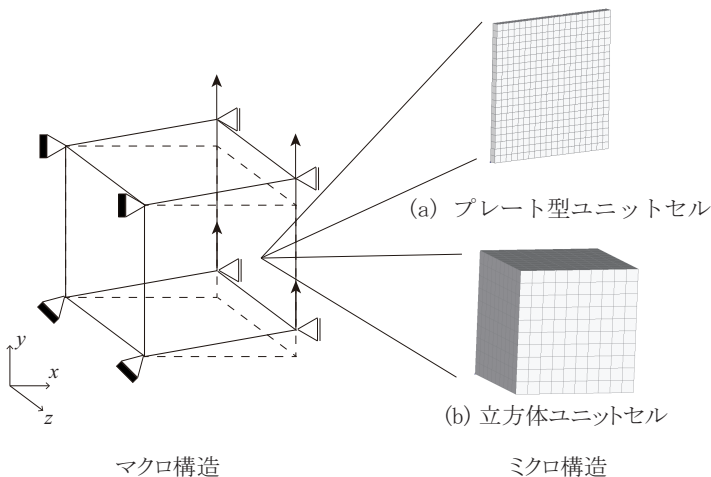


図-1 解析モデルの概念図

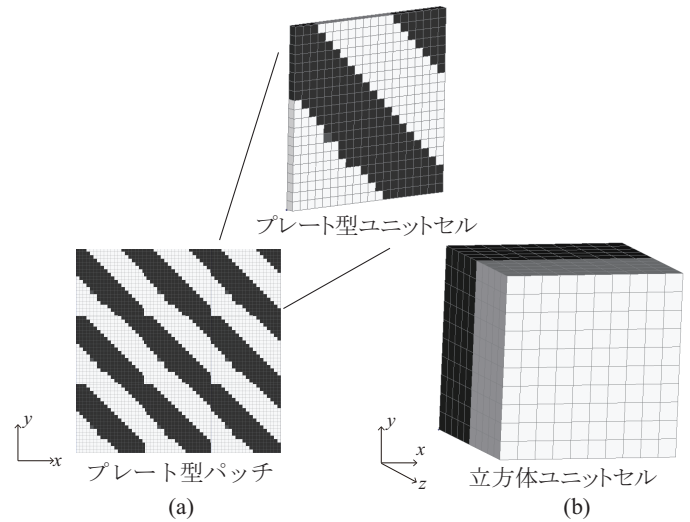


図-2 最適化されたマイクロ構造トポロジー, (a) プレート型ユニットセルとそのパッチ, (b) 立方体ユニットセル

5.2 解析結果

前述のモデルを用いて解析を行った結果、図-2のようなマイクロ構造のトポロジーが得られた。まず、(a) プレート型の解析で得られたトポロジーを見ると水平軸から 45° 傾いた方向に剛性の高い材料が配置されており、せん断力に抵抗する期待どおりのトポロジーが得られることがわかった。これは、加藤ら³⁾の2次元を対象とした結果とほぼ同様の結果であることを示している。

一方、(b) 立方体の解析では2つの材料が奥行き方向に分離したトポロジーが得られ、これは当初想定していた ((a) のトポロジーが奥行き方向にも連なるような) トポロジーとは異なっていた。しかし、この最適化結果の目的関数値と想定していたトポロジーで解析をした際の目的関数値を比較すると、本最適化結果の方がその値は小さく、剛性が高くなることを検証し、(b) の結果は力学的に理にかなうトポロジーの1つであると考えられる。

6. 結論

本研究の目的は、複合材料のマイクロ構造のトポロジーを最適化することによりそのマクロ構造の剛性を最大にする手法を提案することである。最適化計算例から、提案した手法はマクロ構造の力学的挙動を忠実に反映し、そのマイクロ構造のトポロジーを最適化できる手法であることが検証された。

参考文献

- 1) 寺田 賢二郎, 犬飼 壮典, 濱名 康彰, 見寄 明男, 平山 紀夫: 数値材料試験による異方性超弾性体のパラメータ同定, *Transactions of JSCES*, 2008, 20080024, 2008
- 2) Patnaik, S.N., Guptill, J.D., Berke, L.: Merits and limitations of optimality criteria method for structural optimization, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 38, pp. 3087-3120, 1995.
- 3) 加藤 準治, 寺田 賢二郎, 京谷 孝史: 複合材料のマクロ構造挙動を考慮したマイクロ構造トポロジー最適化, *土木学会論文集 A2 (応用力学)*, 68, 2, pp.279-287, 2012.