

# 準脆性材料の破壊プロセスにおける非均質性と幾何学的非線形性の影響再考

東北大学工学部 学生員 青葉 勇樹  
 東北大学大学院 正員 加藤 準治  
 東北大学大学院 正員 寺田 賢二郎  
 東北大学大学院 正員 京谷 孝史  
 茨城大学工学部 正員 車谷 麻緒  
 中央大学理工学部 正員 樫山 和男

## 1. はじめに

脆性材料における破壊の数値解析手法のひとつに、損傷を特徴づける微視的欠陥の密度および分布を表すための内部変数を導入した連続体損傷モデルがある。本研究では、この連続体損傷モデルを超弾性モデルに適応させることにより、有限変形を考慮した数値解析によって、ひび割れの進展とともに準脆性材料の軟化挙動と、破壊に至る過程を数値シミュレーションにより再現する。さらに、微小変形モデルと比較することにより、有限変形を考慮する重要性について検討する。

## 2. 準脆性材料の破壊のモデル化

ここでは、本研究における数値解析手法について説明する。まず、数値解析に用いた材料モデルと連続体損傷モデルの定式化について紹介し、解析のアルゴリズムに沿って準脆性材料のひび割れの発生や進展の本研究における表現方法について述べる。

### 2.1 超弾性 Hencky モデル

準脆性材料の破壊プロセスにおける軟化挙動を再現するために、本研究では超弾性モデルを用いた Hencky モデルは、加硫ゴム力学挙動のモデル化のために Hencky[1933]により提案されたもので、次式で定義される対数ひずみ  $\epsilon$  を用いて標準的な線形弾性モデルを有限変形問題に拡張したものである。

$$\epsilon = \frac{1}{2} \ln b \quad (1)$$

ここで、 $b$  は変形勾配  $F$  を用いて  $b = FF^T$  で定義される left Cauchy-Green tensor である。

### 2.2 損傷モデル構成則

損傷モデルの構成則を次式で定義する。

$$\sigma = (1 - D) H : \epsilon \quad (2)$$

ここで、 $\sigma$  は Cauchy の応力テンソル、 $H$  は 4 階の弾性テンソルである。 $D$  は損傷の密度と分布を特徴づける損傷変数と呼ばれるもので、本研究では Mazars と Pijaudier-Cabot<sup>5)</sup> によって定義された以下の関数を用いる。

$$D(\kappa) = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} \left( 1 - \alpha + \alpha e^{\beta(\kappa_0 - \kappa)} \right) \quad (3)$$

ここで  $\kappa$  は、最大の等価ひずみ量で閾値をとる。また、損傷変数  $D$  は  $\kappa$  の関数として表される。図-1 右図に示したように  $\alpha$  と  $\beta$  は損傷の進展率を支配するパラメータである。ここで  $D = 0$  のときは損傷が発生せず、 $D = 1$  で

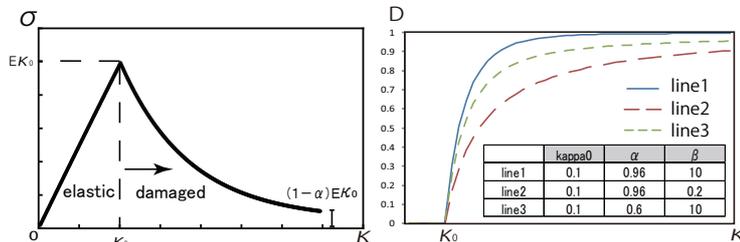


図-1 損傷モデルにおける応力ひずみ関係

は材料が完全に剛性を失った状態を表す。また、図-1 の左図のように、 $\kappa_0$  の値は弾性境界を示す等価ひずみである。損傷の発生については  $\kappa_0$  と次式に示す等価ひずみ  $\epsilon_{eq}$  の大小関係を比較することで判定される。

$$\epsilon_{eq}(I_1, J_2) = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1 + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^2 + \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2} \quad (4)$$

ここで、 $I_1$  はひずみテンソルの第 1 不変量、 $J_2$  は第 2 偏差不変量、 $\nu$  はポアソン比、 $k$  は圧縮引張強度比である。等価ひずみの評価にはさまざまな定義式があるが、本研究では、圧縮引張強度の違いを評価できる de Vree モデルを用いた。なお、材料ヤコビアンは以下のように表すことができる。

$$C_t = (1 - D(\kappa)) H - \frac{\partial D}{\partial \kappa} \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial \epsilon_{eq}} \cdot \frac{\partial \epsilon_{eq}}{\partial \epsilon} \sigma_{el} \quad (4)$$

ここで、 $\sigma_{el}$  は弾性の応力テンソルである。

### 2.3 有限変形への拡張

ここでは材料ヤコビアンを有限変形問題における接線係数に変換する。空間座標を参照した接線係数、すなわち空間弾性テンソル  $a$  は、等方性材料について次式で表記される。

$$a_{ijkl} = \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial \tau}{\partial b} : B \right]_{ijkl} - \sigma_{il} \delta_{jk} \quad (5)$$

ここで、 $\tau$  は Kirchhoff 応力テンソルである。また、 $B$  は  $b$  を 4 階のテンソルに置き換えたもので次式で定義される。

$$B_{ijkl} = \delta_{ik} b_{jl} + \delta_{jk} b_{il} \quad (6)$$

式 (5) において、超弾性モデルに依存する唯一の項は、微分係数  $\frac{\partial \tau}{\partial b}$  の成分である。Hencky モデルにおける Kirchhoff 応力  $\tau$  は、対数 Euler ひずみの線形関数であるが、定義式 (5) により、このひずみ自身は  $b$  の関数である。このため、式 (5) に微分連鎖則を適用すれば導関数  $\frac{\partial \tau}{\partial b}$  は次式のように計算される。

$$\frac{\partial \tau}{\partial b} = \frac{\partial \tau}{\partial \epsilon} : \frac{\partial \epsilon}{\partial b} = \frac{1}{2} D : L \quad (7)$$

ここで、4階のテンソル  $L$  は

$$L = \frac{\partial(\ln b)}{\partial b} \quad (8)$$

であり、 $B$  に関するテンソルの対数関数の微分係数である。また、 $D$  は、微小変形における接線係数  $C_t$  を用いて以下のように表される。

$$D = J \cdot C_t \quad (9)$$

ここで、 $J$  はヤコビ行列式で、変形勾配テンソル  $F$  を用いて以下で示される。

$$J = \det F \quad (10)$$

式 (5) に式 (7) を代入して整理すれば、最終的に空間表記の Hencky の弾性テンソル  $a$  は次式のように表される。

$$a_{ijkl} = \frac{1}{2J} [D : L : B]_{ijkl} - \sigma_{il} \delta_{jk} \quad (11)$$

### 3. 解析結果

まず、損傷モデルの特性と損傷による材料の軟化挙動の様子を図-2の三要素一軸引張モデルの数値シミュレーション結果を用いて示す。三要素のうち真ん中の要素 B の  $\kappa_0$  の値を両端の要素 A に比べて小さい値とすることで意図的に真ん中の要素に損傷を起こした。グラフと変形図から損傷が発生した後に要素 B のひずみが増加する軟化挙動を示す様子が見られる。このとき、要素 B において損傷係数  $D$  は最大値  $D = 0.91$  をとり、材料剛性をほぼ失っている。連続体損傷モデルではこのように損傷が起きたのち損傷係数  $D$  の値が  $D = 1$  に収束していき、材料が剛性を失っていく挙動を再現することができる。

つぎに、穴あきの準脆性材料モデルに一軸引張変位  $\epsilon = 0.0001$  を与えた場合の、変形図と損傷変数値のコンター表示を図-3に示す。圧縮引張強度比を  $k = 3.0$  とし、引張に脆性的な材料とした。損傷係数の値が  $D = 1$  に近づくとき、材料が剛性を失い、ひび割れが進展していくとみなすことができる。ここで、損傷係数が 1 に漸近した値を白色で表示すると変形図において、解析ステップ数 6000 回で損傷が発生したのち、ひび割れが横方向に進展していく挙動がみられる。

### 4. まとめ

連続体損傷モデルを用いて、準脆性材料のひび割れの発生、進展を視覚化することができた。今後は、非均質性と損傷の発生プロセスの関係性と損傷の発生がマクロな材料強度に与える影響、さらには有限変形を考慮することの重要性を微小変形を用いた解析との比較を通して検証する。

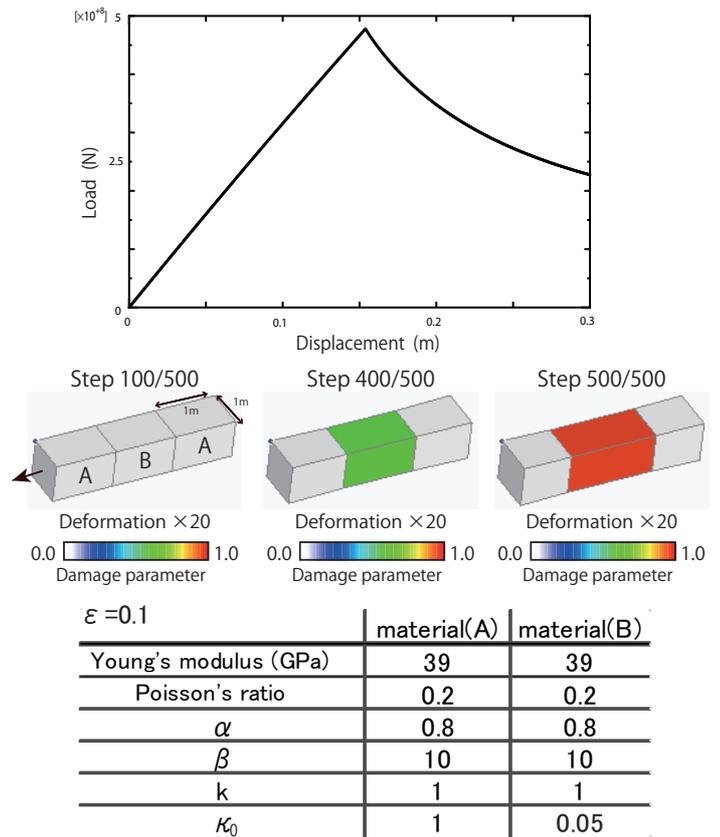


図-2 一軸引張モデルの数値解析結果

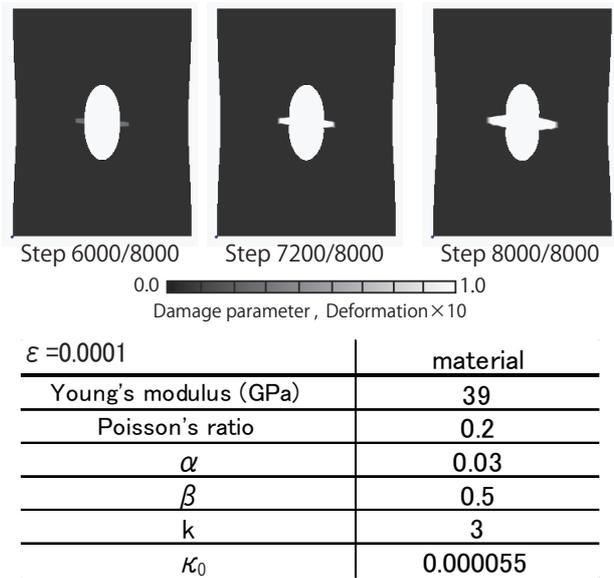


図-3 穴あきコンクリートモデル数値解析結果

### 参考文献

- 1) Javier Bonet, Richard D. Wood : Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, 2nd Edition
- 2) EA de Souza Neto, D Peric, DRJ Owen : Computational methods for plasticity, Theory and applications, 2008
- 3) 京谷孝史 : よくわかる連続体力学ノート, 2008
- 4) Junji Kato : Material Optimization for Fiber Reinforced Composites applying a Damage Formulation
- 5) Mazers J., Pijaudier-Cabot G : Continuum damage theory-application to concrete, pp.345-346