

変形局所化に対する各応力速度の特性の評価

東北大学工学部 学生員 荒川 淳平
 東北大学大学院工学研究科 正員 岩熊 哲夫
 東北大学大学院工学研究科 正員 齊木 功

1. まえがき

構成則に用いる客観的な応力速度は無数に選択できるが、その選択によっては巨視的な応力 ひずみの結果だけでなく局所化予測の結果も違ってくる。そこで、各速度の持つ特徴を局所化予測から整理するという目的で、本研究では、Cauchy 応力の Jaumann 速度をはじめとした客観性を有するいくつかの応力速度を構成則に用いて、平面および3次元ひずみ問題において変形局所化予測を行い、応力速度の選択が局所化に及ぼす影響を比較検討した。

2. 構成則

増分型の構成則には客観性を有する応力速度 $\dot{\sigma}^*$ を用いる必要があり、一般には変形速度 d と

$$\dot{\sigma}_{ij}^* = C_{ijkl}^{ep} d_{kl} \quad (1)$$

のようにモデル化される。ここに C^{ep} は弾塑性接線係数である。この $\dot{\sigma}^*$ によく用いられるのは Jaumann 速度 $\overset{\nabla}{\sigma}$ であるが、そうでないといけないことはない。これ以外にも客観性を有する応力速度には、Truesdell 速度 $\overset{\nabla}{\sigma}$ 、Oldroyd 速度 $\overset{\square}{\sigma}$ 、Kirchhoff 速度 $\overset{\nabla}{\tau}^k$ 、Biot 速度 $\overset{\circ}{\sigma}$ 、convected 速度 $\overset{\diamond}{\sigma}$ などがあり、これらは

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}\sigma_{kj} - w_{jk}\sigma_{ki} \quad (2)$$

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - v_{i,k}\sigma_{kj} - v_{j,k}\sigma_{ki} + v_{k,k}\sigma_{ij} \quad (3)$$

$$\overset{\square}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - v_{i,k}\sigma_{kj} - v_{j,k}\sigma_{ki} \quad (4)$$

$$\overset{\nabla}{\tau}_{ij}^k = \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}\sigma_{kj} - w_{jk}\sigma_{ki} + v_{k,k}\sigma_{ij} \quad (5)$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - v_{i,k}\sigma_{kj} - v_{j,k}\sigma_{ki} + v_{k,k}\sigma_{ij} + \frac{1}{2}(\sigma_{ik}d_{kj} + d_{ik}\sigma_{kj}) \quad (6)$$

$$\overset{\diamond}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + v_{k,i}\sigma_{kj} + v_{k,j}\sigma_{ki} \quad (7)$$

と定義される。ここに v は速度勾配、 w はスピンである。

3. 例として用いる構成モデル

ここでは一例として非関連流れ則の Drucker-Prager モデル¹⁾に基づいたモデルを用いることにする。

そのモデルでは変形速度の塑性成分 d^p は非共軸性を有し、弾性成分 d^e は増分型の Hooke の法則に従うとすると

$$d_{ij}^p = \frac{1}{H} \left(\frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \beta\delta_{ij} \right) \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} + \alpha\delta_{kl} \right) \overset{*}{\sigma}_{kl} + \frac{1}{2h_1} \left(\overset{*}{\sigma}_{ij} - \frac{\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}^2} \overset{*}{\sigma}_{kl} \right) \quad (8)$$

$$d_{ij}^e = \frac{1}{2\mu} \overset{*}{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3\kappa} - \frac{1}{2\mu} \right) \delta_{ij} \overset{*}{\sigma}_{kk} \quad (9)$$

のように表現できる。ここに、プライムは偏差成分を表し、 H は硬化係数、 $\bar{\sigma}$ は相当応力、 α は内部摩擦係数、 β は塑性的体積膨張係数、 δ_{ij} は Kronecker のデルタ、 h_1 は非共軸性を代表する材料パラメタ、 μ はせん断弾性係数、 κ は体積弾性係数である。

4. 局所化条件

有限変形理論の枠組における局所化条件としては Hill and Hutchinson²⁾ のモデルを用いるとすると、

$$(\nu_i F_{ijkl} \nu_l) g_k = 0 \Rightarrow \det |\nu_i F_{ijkl} \nu_l| = 0 \quad (10)$$

が成立したときに、 ν を法線とするせん断帯の局所化が発生することになる。ここに F は、nominal 応力速度 \dot{n} と速度の空間微分 ∇v で表した構成則の接線係数

$$\dot{n}_{ij} = F_{ijkl} v_{k,l} \quad (11)$$

である。

5. 解析結果

表-1 に平面ひずみ問題における引張の場合に $\alpha = \beta = 0$ としたときの $\bar{\mu}/\mu$ と H/μ の違いによる各応力速度の局所化予測の解析結果を示した。また、図-1 および図-2 には圧縮の場合の各パラメタの影響を示した。予測に際しては、Young 率 207 GN/m²、Poisson 比 0.3 を用いた。

局所化発生応力に関しては両パラメタの影響により変化は見られるものの、応力速度あるいは引張および圧縮の場合によってその挙動は様々に異なる。一方、せん断

表-1 平面ひずみ問題における引張の場合の局所化発生応力およびせん断帯角度 ($\alpha = \beta = 0$)

$\bar{\mu}/\mu$		0.01		0.1		1.0	
		0.0001	0.001	0.0001	0.001	0.0001	0.001
$\frac{\sigma_{cr}}{\mu}$	Jaumann	3.99×10^{-3}	1.20×10^{-2}	1.29×10^{-2}	4.07×10^{-2}	4.73×10^{-2}	1.49×10^{-1}
	Truesdell	8.05×10^{-2}	7.49×10^{-2}	9.17×10^{-1}	9.10×10^{-1}	31.1	31.0
	Oldroyd	8.28×10^{-2}	7.69×10^{-2}	1.31	1.30	—	—
	Kirchhoff	3.97×10^{-3}	1.20×10^{-2}	1.24×10^{-2}	3.89×10^{-2}	3.38×10^{-2}	1.06×10^{-1}
	Biot	4.00×10^{-2}	3.96×10^{-2}	4.00×10^{-1}	4.00×10^{-1}	4.00	4.00
	convected	1.99×10^{-4}	1.94×10^{-3}	2.00×10^{-4}	1.99×10^{-3}	—	—
$\theta(\text{度})$	Jaumann	42.1	35.2	44.1	42.1	44.7	43.9
	Kirchhoff	42.1	35.3	44.2	42.3	44.9	44.5
	convected	44.9	43.5	45.0	44.9	—	—

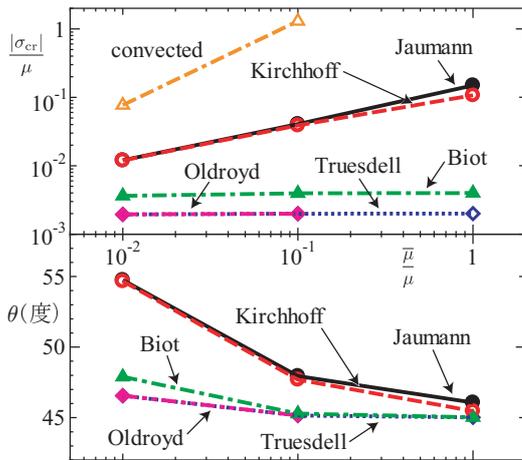


図-1 圧縮の場合の非共軸パラメタの影響 ($\alpha = \beta = 0, H/\mu = 0.001$)

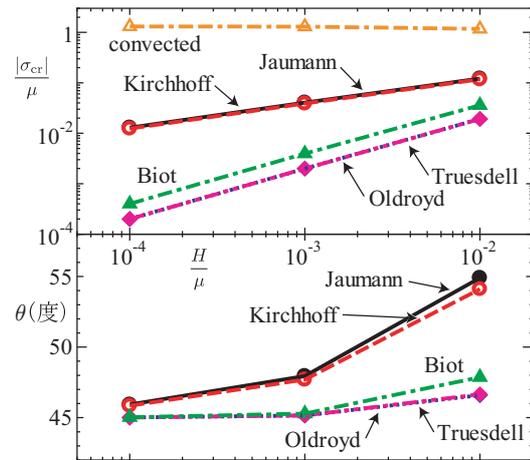


図-2 圧縮の場合の硬化パラメタの影響 ($\alpha = \beta = 0, \bar{\mu}/\mu = 0.1$)

帯角度に関しては応力速度によっては予測できない場合があるが、共軸性が強くなるほど45度に漸近し、硬化性が強くなるほど45度から離れるという特性はすべてに共通である。

Kirchhoff速度とTruesdell速度はそれぞれJaumann速度とOldroyd速度に体積膨張項を追加したものであり(式(2)-(5)参照)、設定したモデルにおける一軸引張状態では体積変形が生じていると考えられるが、表および図からはJaumann速度およびKirchhoff速度、Truesdell速度およびOldroyd速度にはそれぞれ互いに挙動の違いは現れなかった。これは $\beta = 0$ と設定したためであり、 β を変化させることでそれぞれに違いが生じてくる。例えば β を大きくすることで、Jaumann速度は引張の応力の絶対値は大きくなり圧縮のそれは小さくなるが、Kirchhoff速度はその逆の挙動を示す。Truesdell速度およびOldroyd速度は β を大きくすると応力増減の変化の向きは同じだが、前者の方が体積膨張項の影響によりその変化率は小さくなる。

引張と圧縮の場合における応力レベルに関しては、

Jaumann速度およびKirchhoff速度は同程度であるのに対し、その他には比較的大きなレベルの差が生じ、共通して局所化予測できない方の場合の応力レベルが高すぎる。特に、Oldroyd速度およびconvected速度に至っては、非共軸パラメタの影響を大きく受け局所化条件によって得られる応力が計算上では無い状態になってしまった。

6. 結論

平面および3次元ひずみ問題の局所化において、Jaumann速度とKirchhoff速度、Truesdell速度とOldroyd速度における特性はそれぞれ互いに類似していた。また、現実的なレベルの応力を得るためには、応力速度によっては材料パラメタに適用限界を課した上で解析を行う必要がある。

参考文献

- 1) S. Nemat-Nasser and A. Shokooh: On finite plastic flows of compressible materials with internal friction, *Int. J. Solids Structures*, Vol.16, pp.495-514, 1980.
- 2) Hill, R. and Hutchinson, J. W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.239-264, 1975.