

東北大学工学部 ○学生員 瀬戸川敦
東北大学大学院工学研究科 正員 斉木 功
東北大学大学院工学研究科 正員 岩熊哲夫
東北大学大学院工学研究科 学生員 鍵 一彰

1. はじめに

鋼コンクリート合成床版やサンドイッチパネル等の合成板は力学的に優れた設計を可能にしている¹⁾。合成床版の設計にあたっては、鋼とコンクリートの一体化が前提となっており、そのためにずれ止めが設けられる²⁾。このずれ止めは構造物全体に対しては非常に小さいので、構造物全体を対象とする有限要素解析でずれ止めを陽にモデル化する事は計算負荷の観点から現実的ではない。従って、何らかの平均物性評価が必要となる。合成床版の場合、ずれ止めに作用する荷重が明確でないため、要素試験によって平均物性評価を行うことは困難である。そこで、本研究では、均質化理論に基づく合成板の数値的な物性評価を行うための周期境界条件を定式化する。

2. 周期的な平板の2方向周期境界条件

(1) 解析対象

図-1に示すような座標系において定義される直交する2つの周期ベクトル

$$\mathbf{r}_1 = \begin{Bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ r_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

で表される周期性を有する平板の単位構造を代表体積要素として考える。

(2) 2方向周期境界条件

有限要素法により、離散化された問題を考える。以下の関係

$$\mathbf{x}^d - \mathbf{x}^i = \mathbf{r}_i \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

を満たす境界上の節点*i, d*のペアについて*i*を独立節点、*d*を従属節点と呼ぶことにする。代表体積要素の巨視的な変形に対する、独立節点*i*と従属節点*d*の間の相対変位 $\hat{\mathbf{u}}$ は

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^d - \mathbf{u}^i = \mathbf{u}_\epsilon + \mathbf{u}_\phi + \mathbf{u}_\gamma + \mathbf{u}_\varphi \quad (3)$$

と表される。ここで、 $\mathbf{u}_\epsilon, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_\gamma, \mathbf{u}_\varphi$ はそれぞれ、一様な垂直ひずみ、曲げ、せん断、ねじりによる相対変位であり

$$\mathbf{u}_\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_1 r_1 \\ \epsilon_2 r_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

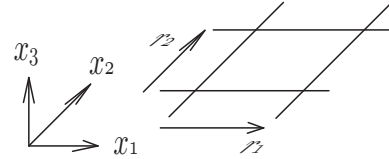


図-1 2方向周期

$$\mathbf{u}_\phi = \begin{Bmatrix} \phi_2 x_3 r_1 \\ -\phi_1 x_3 r_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{u}_\gamma = \begin{Bmatrix} \frac{\gamma_{12}}{2} r_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} r_1 \\ \gamma_{31} r_1 + \gamma_{23} r_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{u}_\varphi = \begin{Bmatrix} \varphi x_3 r_2 \\ -\varphi x_3 r_1 \\ \varphi x_2 r_1 + \varphi x_1 r_2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

と定義される。ここで、 ϵ_i は x_i 軸ひずみ、 ϕ_i は x_i 軸周りの曲率、 γ_{ij} は x_i 軸と x_j 軸を含む平面のせん断ひずみ、 φ は $x_1 x_2$ 面ねじり曲率を表す。

(3) 力の釣り合い

周期性を考えると、対となる独立節点*i*と従属節点*d*の節点力 f^i, f^d の間には

$$\mathbf{f}_k^i + \mathbf{f}_k^d = \mathbf{0} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (8)$$

が成立する。

(4) 回転拘束

せん断変形 γ_{23}, γ_{13} を与える場合、相対変位に関する周期境界条件のみでは剛体回転が生じ、代表体積要素は変形しない。そこで、断面の平均回転を要素の回転として剛体回転を拘束する。代表体積要素の重心点を原点に置くことで、 x_2, x_1 軸にそれぞれ垂直な断面の x_1, x_2 軸まわりの回転に関する拘束条件式はそれぞれ

$$g_1 = \frac{\int x_3 u_2 dV}{r_2 \int (x_3)^2 dA_{31}} = 0, \quad g_2 = \frac{\int x_3 u_1 dV}{r_1 \int (x_3)^2 dA_{32}} = 0 \quad (9)$$

と表される。

基準座標系で定義される3次元アイソパラメトリック要素の形状関数 $N^n(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ と変数変換 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ のヤコビアン J を用いてこの拘束条件式を離散化すると

$$\bar{g}_1 = \sum w_1^n u_2^n = 0; \quad \bar{g}_2 = \sum w_2^n u_1^n = 0 \quad (10)$$

$$w_i^n = \frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\sum N^m x_3^m) N^n \det \mathbf{J} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{r_j \int (x_3)^2 dx_i dx_j} \quad (i, j = 1, 2, i \neq j) \quad (11)$$

となる．

(5) 剛性方程式

剛体回転の拘束条件を含む剛性方程式は，Lagrange 未定乗数法を用いて定義される汎関数

$$\Pi_L = \Pi + \bar{M}_1 \bar{g}_1 + \bar{M}_2 \bar{g}_2 \quad (12)$$

の停留条件から

$$\mathbf{K} \mathbf{u} + \bar{M}_1 \frac{\partial \bar{g}_1}{\partial \mathbf{u}} + \bar{M}_2 \frac{\partial \bar{g}_2}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad (13)$$

となる．ここで， Π は全ポテンシャルエネルギー， $\bar{M}_i$ は剛体回転の拘束に必要な曲げモーメントに相当する Lagrange 未定乗数， $\bar{g}_i$ は式 (10) で示した拘束条件式であり， $\mathbf{K}$ は通常の剛性行列， $\mathbf{f}$ は節点力ベクトルである．

(6) 周期境界条件の組み込み

独立節点 i ，従属節点 d ，その他の節点 f について，元の剛性方程式を

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{if} & \mathbf{K}_{id} \\ \mathbf{K}_{fi} & \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fd} \\ \mathbf{K}_{di} & \mathbf{K}_{df} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^i \\ \mathbf{u}^f \\ \mathbf{u}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^i \\ \mathbf{f}^f \\ \mathbf{f}^d \end{bmatrix} \quad (14)$$

とすると，式 (3),(8),(10),(13) から

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{ii} & \mathbf{K}'_{if} & \mathbf{K}'_{id} & \mathbf{w}^i \\ \mathbf{K}_{fi} & \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fd} & \mathbf{w}^f \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{w}^i & \mathbf{w}^f & \mathbf{w}^d & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^i \\ \mathbf{u}^f \\ \mathbf{u}^d \\ \bar{\mathbf{M}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}^f \\ \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{w}^i = \mathbf{w}^i + \mathbf{w}^d, \quad \mathbf{K}'_{in} = \mathbf{K}_{in} + \mathbf{K}_{dn} \quad (n = i, d, f) \quad (16)$$

と表すことができる．

3. 均質板による検証

本研究により得られた周期境界条件を，均質板に対する解析結果により検証する．対象モデルは要素数 14472，節点数 16212 とし，要素は全て 8 節点双一次 6 面体要素である．

(1) セン断変形

変位の拘束のみを考慮し， x_2 軸方向の変位を拘束し， x_3 軸方向にせん断変形に対する強制変位を与えた場合の変形の様子と x_2x_3 面せん断ひずみ分布を図-2 に示す．せん断ひずみは x_1x_2 面内で一様となり板厚方向にのみ変化する事が期待される．強制変位による解析では，中央でせん断ひずみが最大となるものの， x_2 軸方向にも変化しており，適切にせん断ひずみを再現しているとは言えない．一方，周期境界条件によってせん断ひずみ $\gamma_{23} = 0.1$ を与えた場合の変形の様

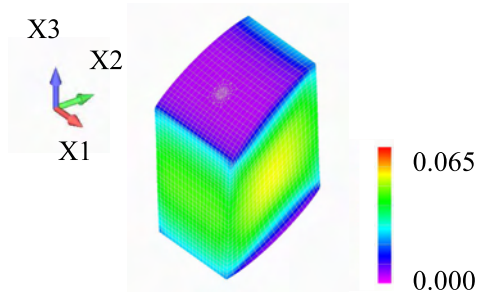


図-2 強制変位によるせん断ひずみ分布 (変形倍率 10)

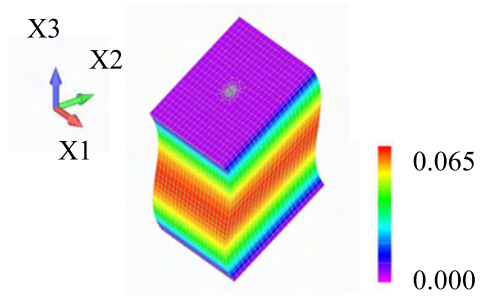


図-3 周期境界条件によるせん断ひずみ (変形倍率 10)

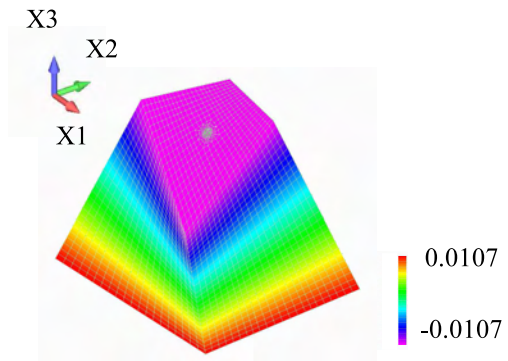


図-4 ねじり変形によるせん断ひずみ (変形倍率 0.1)

子と x_2x_3 面せん断ひずみ分布を図-3 に示す．せん断ひずみの変化は板厚方向にのみ見られる．また，板厚方向の中央付近で最も大きく，上下面に近づくほど小さくなっている．このことから，せん断変形を適切に再現していると言える．

(2) ねじり変形

x_1x_2 面ねじり変形 $\varphi = 0.1$ を与えた場合の x_1x_2 面せん断ひずみ分布を図-4 に示す．板厚方向の変化が見られ， x_1x_2 面内に一様に分布している．また， x_2x_3 面せん断ひずみおよび x_1x_3 面せん断ひずみは生じないことを確認した．このことから，ねじり変形を適切に再現していると言える．

参考文献

- 1) 街道浩，松井繁之，岩田幸三：鋼・コンクリート合成床版の性能照査型設計法の提案，土木学会論文集 A，Vol66，No3，pp451-466，2010
- 2) (社)土木学会：複合構造物の性能照査例，複合構造シリーズ 01，(社)土木学会，2006