複雑な微視構造を持つ梁の均質化

東北大学工学部 ○学生員 鐙 一彰
東北大学大学院工学研究科 正 員 斉木 功
東北大学大学院工学研究科 正 員 山田真幸
東北大学大学院工学研究科 正 員 岩熊哲夫

1. まえがき

近年，様々な構造物に複合構造が用いられている．複合構造は異種材料の特性を生かすことで優れた性能を引き出すことが可能であるが，異種材料一体化のため微視構造が複雑になり，構造物全体の数値解析が困難となる．そのため微視構造の平均物性評価が必要となり，多くの場合，要素実験が行われている．一方，均質化法は，微視構造の平均的な力学特性を数値的に評価する方法であるが，適切な周期境界条件が見出されていないため，板や梁のせん断特性の評価は行われていない．そこで，本報告では，3 次元梁のせん断特性評価のための周期境界条件を提案し，複雑な微視構造を持つ構造部材の平均的な力学的特性を評価する方法を開発する．

2. 1 次元周期構造の周期境界条件

周期ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表される 1 次元周期構造を有する 3 次元梁の周期境界条件の定式化を行う．微視構造を表す空間の直交座標を $\boldsymbol{x} = \{x_1 \ \ x_2 \ \ x_3\}^{\mathrm{T}}$，変位を $\boldsymbol{u} = \{u_1 \ \ u_2 \ \ u_3\}^{\mathrm{T}}$ とする．ここでは，1 次元周期構造なので $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_j = 0 \quad (j = 2, 3)$ としても一般性を失わないため，$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_1$ とする．また，**図–1** に示すように，代表体積要素の片方の断面を独立断面とし，独立断面の変形に応じて周期的に変形するもう一方の断面を従属断面とする．

曲げ変形，軸変形に対する周期境界条件は，x_3，x_2 軸に関する曲率をそれぞれ ϕ_3，ϕ_2 とし，軸歪みを ϵ とすると

$$
{}^{\mathrm{d}}u_1 - {}^{\mathrm{i}}u_1 = (x_2\phi_3 + x_3\phi_2 + \epsilon)\, r \qquad (1)
$$

である．これは，代表体積要素の剛体回転に関しては何ら拘束を及ぼさない．ここで，周期性より対となる独立断面と従属断面における x_j 方向の変位をそれぞれ ${}^{\mathrm{i}}u_j$，${}^{\mathrm{d}}u_j$ とする．

せん断変形，ねじりに対する周期境界条件は，x_1x_2 平面，x_1x_3 平面におけるせん断ひずみをそれぞれ γ_{12}，γ_{13} とし，軸ねじり曲率を φ とすると

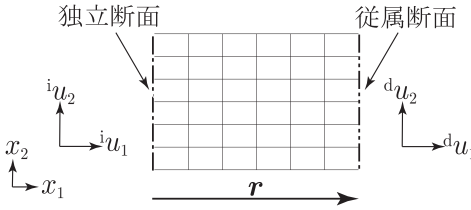
$$
{}^{\mathrm{d}}u_2 - {}^{\mathrm{i}}u_2 = (\gamma_{12} - \varphi x_3)\, r \qquad (2)
$$

$$
{}^{\mathrm{d}}u_3 - {}^{\mathrm{i}}u_3 = (\gamma_{13} + \varphi x_2)\, r \qquad (3)
$$

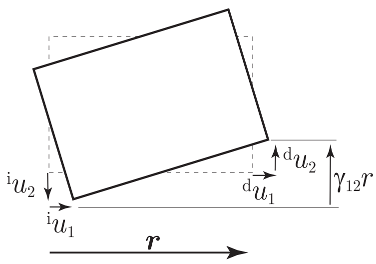
である．しかし，せん断に関しての周期境界条件 (2), (3) のみでは**図–2** のように剛体回転し，せん断変形を与えることができない．そこで，剛体回転の拘束を別途導入する必要がある．代表体積要素の剛体回転を，代表体積要素全断面の平均回転とすると，剛体回転の拘束は

$$
g_k := \frac{1}{r}\int_0^r \tilde{\theta}_k(x_1)\,\mathrm{d}x_1 = 0 \quad (k = 2, 3) \qquad (4)
$$

と表すことができる．ここで，$\tilde{\theta}_3(x_1)$，$\tilde{\theta}_2(x_1)$ は，x_1 における断面の x_3 軸，x_2 軸まわりの回転とする．曲げ変形，軸変形，軸ねじりにおいて代表体積要素の平均回転は常にゼロなので，剛体回転の拘束条件 g_3，g_2 は，せん断時の剛体回転以外の変形時には拘束を与えない．断面の回転 $\tilde{\theta}_3(x_1)$, $\tilde{\theta}_2(x_1)$ を断面上の変位から回帰される最小 2 乗近似直線の傾きとすれば



図–1 一次元周期構造の独立断面と従属断面



図–2 せん断を与えたときの梁の剛体回転

Key Words: 均質化法， 周期境界， 構造要素，せん断

〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 構造強度学研究室

$$R_k(x_1) := \int \left(u_1 - \tilde{\theta}_k x_2 - \tilde{b}_k \right)^2 \mathrm{d}A \quad (k = 2, 3) \quad (5)$$

を最小にする $\tilde{\theta}_3$, $\tilde{\theta}_2$ が断面の回転となる．なお，$\tilde{b}_3$, $\tilde{b}_2$ は断面の x_2, x_3 切片である．R_3, R_2 が最小値をとる条件より，断面の回転は u_1 で表すことができ，例えば，x_1 方向に断面が一定で断面の図心を x_2, x_3 の原点とすると，断面一次モーメントはゼロ，断面二次モーメントは x_1 によらず一定なので，断面の回転 $\tilde{\theta}_3$ は

$$\tilde{\theta}_3(x_1) = \left(\int x_2 u_1 \, \mathrm{d}A \right) \Big/ \left(\int (x_2)^2 \, \mathrm{d}A \right) \quad (6)$$

となる．したがって，式 (6) を式 (4) に代入すると，剛体回転の拘束は

$$g_3 = \left(\int x_2 u_1 \, \mathrm{d}V \right) \Big/ \left(r \int (x_2)^2 \, \mathrm{d}A \right) = 0 \quad (7)$$

と表される．

次に，剛体回転の拘束条件 (7) を離散化したものを $\bar{g}_3$, $\bar{g}_2$ と表し，剛体回転の拘束条件を含む剛性方程式を導出する．Lagrange の未定乗数法により，剛体回転の拘束条件を含んだ汎関数を

$$\Pi_{\mathrm{L}} := \Pi + \tilde{M}_3 \left(\bar{g}_3(\boldsymbol{u}, \tilde{\theta}_3) \right) + \tilde{M}_2 \left(\bar{g}_2(\boldsymbol{u}, \tilde{\theta}_2) \right) \quad (8)$$

と定義する．ここで，Π は系の全ポテンシャルエネルギ，$\boldsymbol{u}$は節点変位である．$\tilde{M}_3$, $\tilde{M}_2$ は Lagrange の未定乗数であり，物理的には，代表体積要素の剛体回転を拘束するために必要な曲げモーメントを意味する．汎関数が停留する条件は

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{\mathrm{L}} = \delta\boldsymbol{u} \left(\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} + \tilde{M}_3 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}} \bar{g}_3 + \tilde{M}_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}} \bar{g}_2 \right) \\ + \delta\tilde{M}_3 \bar{g}_3 + \delta\tilde{M}_2 \bar{g}_2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

である．なお，$\boldsymbol{K}$は回転の拘束を含む前の剛性行列である．よって，剛体回転の拘束条件を含む剛性方程式は

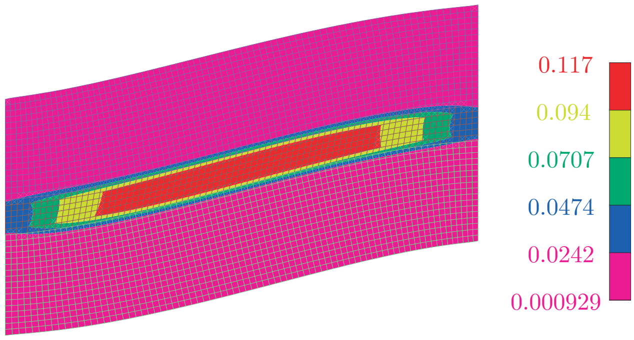
$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} + \tilde{M}_3 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}} \bar{g}_3 + \tilde{M}_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}} \bar{g}_2 = \boldsymbol{f} \quad (10)$$

$$\bar{g}_3 = 0, \quad \bar{g}_2 = 0 \quad (11)$$

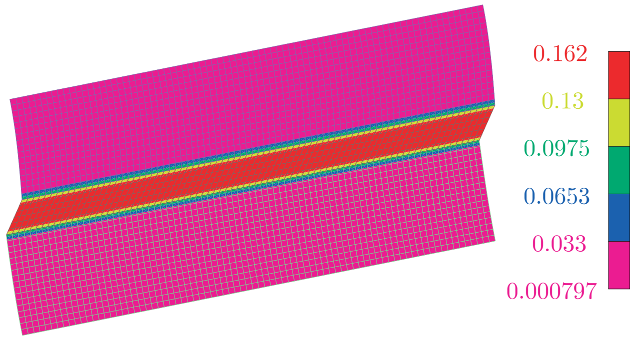
と表され，文献[1)]で述べられている方法により解くことができる．

3. 解析例

周期境界条件により 2 次元梁のせん断剛性を評価するための解析を行う．また，比較のため，端面の変位の拘束のみを考慮した変位境界条件による同モデルの解析も行った．なお，解析対象として，要素数 3200，節点数 3321 の 4 節点 4 辺形要素の有限要素モデルを用い，せん断ひずみ $\gamma = 0.1$ を与える．このモデルは Young 率の異なる 3 つの材料を用い 3 層構造とし，上層，中層，下層の Young 率をそれぞれ 5.0，1.0，10.0 とた．また，全ての層の Poisson 比を 0.3 とした．



図–3 変位境界条件による 2 次元梁のせん断変形



図–4 周期境界条件による 2 次元梁のせん断変形

変位境界条件では端面の x_1 方向の変位を拘束し，x_2 方向に強制変位を与え解析を行った．その時の変形図とせん断ひずみ分布を**図–3** に示す．弱い中層でせん断変形が卓越することが予想されるが，変位境界条件では，端面の変位が拘束されているために，中央付近では中層にせん断変形が集中しているものの，端面では高さ方向にせん断変形が一様となっている．また，中央付近では曲げ変形も生じており，せん断変形が緩和されている．

一方，周期境界条件を用いて解析した時の変形図とせん断ひずみ分布を**図–4** に示す．周期境界条件では周期性を考慮し代表体積要素全断面の平均回転を拘束することで，端面での不自然な拘束がなく，せん断ひずみ分布ははり軸方向に一様になり，せん断変形を適切に再現していると言える．

参考文献

1) 斉木　功，大植　健，中島章典，寺田賢二郎：構造要素を用いたミクロモデルによるマルチスケールモデリングとそのセル構造体への適用，日本計算工学会論文集，Vol.4，pp.139-144，2002.