

# パンタグラフ型トラス構造の折りたたみ解析

東北学院大学 正員 中沢正利  
 広島大学大学院 正員 有尾一郎

## 1. まえがき

例えば、ショックアブソーバー機能を持ったスマート構造の一例として、屋根トラスを垂直方向に重ね合わせたようなパンタグラフ型トラス構造を考えると、垂直方向に圧縮力を受けるとき、各々の屋根トラスは飛び移り座屈を生じて、順次折りたたまれていく収納過程に入る。また、収納された状態から引張り力を与えることにより展開過程となる展開構造物でもある。ここでは、この構造の折りたたみ機構をコントロールすることを目的として、シミュレーションによる折りたたみ解析の結果について報告する。

## 2. エネルギー法による解析解

図-1 に示すパンタグラフ型トラス構造は左右対称形であるが、非対称変形をも考慮するために、ここではフルモデルとして定式化する。このトラス構造の幅を  $L$  とし、各々の周期構造の高さを  $h_i = \gamma_i L$  と仮定すると、トラス部材の初期長さは  $\ell_i = \sqrt{L^2 + h_i^2} = L\sqrt{1 + \gamma_i^2}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) と表され、ここで  $n$  は層数である。変形後の長さ  $\hat{\ell}_{i,k}$ , ( $k = \ell, r$ ) は高さと同変位の関数として次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \hat{\ell}_{1,\ell} &= L\sqrt{1 + (\gamma_1 - \bar{v}_1 + \bar{v}_{2,\ell})^2} \\ \hat{\ell}_{2,r} &= L\sqrt{1 + (\gamma_2 - \bar{v}_{2,r} + \bar{v}_3)^2} \\ \therefore \hat{\ell}_{i,k} &= L\sqrt{1 + (\gamma_i - \bar{v}_{i,k} + \bar{v}_{i+1,k})^2}, \\ &\quad (\text{for only } i = \text{even}, \quad k = \ell, r) \end{aligned}$$

ここで、 $\gamma_i = h_i/L$  かつ  $\hat{v}_i = v_i/L$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) である。 $\ell$  と  $r$  はそれぞれ左右を意味し、節点変位  $\bar{v}_i$  は  $i$  が偶数のときのみ二つの節点を有することになる。計算の簡便化のためにグリーンひずみの定義を用いると、各々のトラス部材の伸びひずみ  $\varepsilon_i$  は

$$\varepsilon_i \equiv \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\hat{\ell}_i}{\ell_i} \right)^2 - 1 \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 + (\gamma_i - \bar{v}_i + \bar{v}_{i+1})^2}{1 + \gamma_i^2} - 1 \right\}$$

と表わされる。これらより、この構造系の総ポテンシャルエネルギー  $U$  は

$$\begin{aligned} U &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{EA_i \ell_i}{2} (\varepsilon_{i,\ell}^2 + \varepsilon_{i,r}^2) - f \bar{v}_1 L \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{EA_i L \sqrt{1 + \gamma_i^2}}{8} \left[ \left\{ \frac{1 + (\gamma_i - \bar{v}_{i,\ell} + \bar{v}_{i+1,\ell})^2}{1 + \gamma_i^2} - 1 \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1 + (\gamma_i - \bar{v}_{i,r} + \bar{v}_{i+1,r})^2}{1 + \gamma_i^2} - 1 \right\}^2 \right] - f \bar{v}_1 L \end{aligned}$$

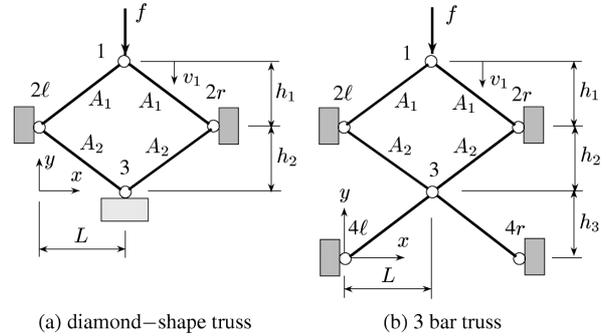


図-1 パンタグラフ型トラス構造

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i L}{8} \left\{ q_{i,\ell}^2 (q_{i,\ell} - 2\gamma_i)^2 + q_{i,r}^2 (q_{i,r} - 2\gamma_i)^2 \right\} - f \bar{v}_1 L$$

と得られる。ここで、 $f$  は節点 1 に作用する集中荷重であり、 $\beta_i = EA_i / (1 + \gamma_i^2)^{3/2}$  かつ  $q_{i,k} = \bar{v}_{i,k} - \bar{v}_{i+1,k}$ , ( $k = \ell, r$ ) とする。図-1(a) に示されるような二層のパンタグラフ構造、すなわち diamond truss では、非対称変形をも考慮した節点 1 の荷重 変位関係が解析的に得られる。例えば、二層パンタグラフ構造の総ポテンシャルエネルギー  $U$  は

$$\begin{aligned} U &= \frac{L}{8} \left[ \beta_1 \left\{ q_{1,\ell}^2 (q_{1,\ell} - 2\gamma_1)^2 + q_{1,r}^2 (q_{1,r} - 2\gamma_1)^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \beta_2 \left\{ q_{2,\ell}^2 (q_{2,\ell} - 2\gamma_2)^2 + q_{2,r}^2 (q_{2,r} - 2\gamma_2)^2 \right\} \right] - f \bar{v}_1 L \end{aligned}$$

のように示され、つりあい方程式は以下のエネルギーの停留条件より得られる。

$$F_{i,k} = \frac{\partial U}{\partial v_{i,k}} = \frac{\partial U}{\partial \bar{v}_{i,k}} \frac{\partial \bar{v}_{i,k}}{\partial v_{i,k}} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

いま、 $\beta_i = \beta$  かつ  $\gamma_i = \gamma$  のような単純な場合を仮定すると、荷重 変位関係は次のように得られる。

$$\begin{aligned} F_{2,r} = 0 &: -(\bar{v}_1 - \bar{v}_{2,r})(\bar{v}_1 - \bar{v}_{2,r} - \gamma)(\bar{v}_1 - \bar{v}_{2,r} - 2\gamma) \\ &\quad + \bar{v}_{2,r}(\bar{v}_{2,r} - \gamma)(\bar{v}_{2,r} - 2\gamma) = 0 \\ \therefore \bar{v}_{2,r} &= \frac{\bar{v}_1}{2}, \quad \bar{v}_{2,r} = \frac{1}{2} \left\{ \bar{v}_1 \pm \sqrt{\bar{v}_1^2 - 4(\bar{v}_1 - \gamma)(\bar{v}_1 - 2\gamma)} \right\} \\ F_{2,\ell} = 0 &: -(\bar{v}_1 - \bar{v}_{2,\ell})(\bar{v}_1 - \bar{v}_{2,\ell} - \gamma)(\bar{v}_1 - \bar{v}_{2,\ell} - 2\gamma) \\ &\quad + \bar{v}_{2,\ell}(\bar{v}_{2,\ell} - \gamma)(\bar{v}_{2,\ell} - 2\gamma) = 0 \\ \therefore \bar{v}_{2,\ell} &= \frac{\bar{v}_1}{2}, \quad \bar{v}_{2,\ell} = \frac{1}{2} \left\{ \bar{v}_1 \pm \sqrt{\bar{v}_1^2 - 4(\bar{v}_1 - \gamma)(\bar{v}_1 - 2\gamma)} \right\} \\ F_1 = 0 : f &= \frac{\beta}{2} \left\{ (\bar{v}_1 - \bar{v}_{2,\ell})(\bar{v}_1 - \bar{v}_{2,\ell} - \gamma)(\bar{v}_1 - \bar{v}_{2,\ell} - 2\gamma) \right. \\ &\quad \left. + (\bar{v}_1 - \bar{v}_{2,r})(\bar{v}_1 - \bar{v}_{2,r} - \gamma)(\bar{v}_1 - \bar{v}_{2,r} - 2\gamma) \right\} \end{aligned}$$

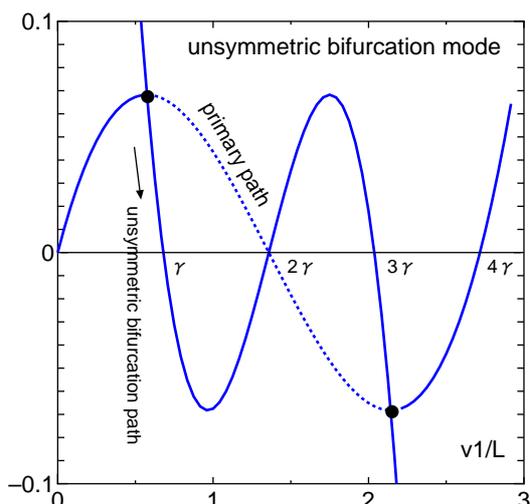


図-2 Equilibrium path of diamond truss

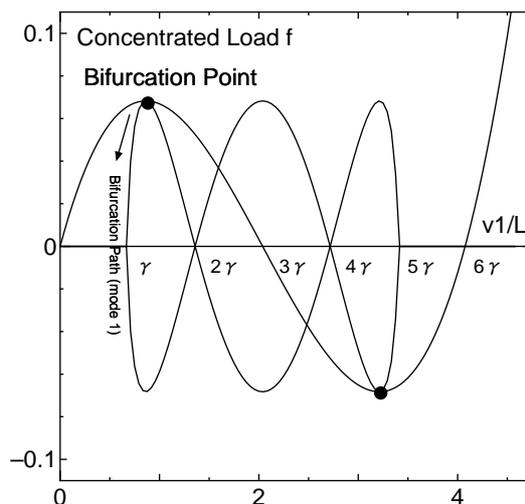


図-3 Analytical solution

これらの結果をまとめると、二つの対称変形解が次のように得られる。

$$f = \frac{\beta}{8} \bar{v}_1 (\bar{v}_1 - 2\gamma) (\bar{v}_1 - 4\gamma), \quad \text{for } \bar{v}_{2,\ell} = \bar{v}_{2,r} = \frac{\bar{v}_1}{2},$$

$$f = -\beta (\bar{v}_1 - \gamma) (\bar{v}_1 - 2\gamma) (\bar{v}_1 - 3\gamma),$$

$$\text{for } \bar{v}_{2,\ell} = \bar{v}_{2,r} = \frac{1}{2} \left\{ \bar{v}_1 \pm \sqrt{\bar{v}_1^2 - 4(\bar{v}_1 - \gamma)(\bar{v}_1 - 2\gamma)} \right\}$$

さらに、非対称解は

$$f = -\beta (\bar{v}_1 - \gamma) (\bar{v}_1 - 2\gamma) (\bar{v}_1 - 3\gamma),$$

$$\text{for } \bar{v}_{2,\ell} = \frac{1}{2} \left\{ \bar{v}_1 \pm \sqrt{\bar{v}_1^2 - 4(\bar{v}_1 - \gamma)(\bar{v}_1 - 2\gamma)} \right\}$$

$$\text{and } \bar{v}_{2,r} = \frac{1}{2} \left\{ \bar{v}_1 \mp \sqrt{\bar{v}_1^2 - 4(\bar{v}_1 - \gamma)(\bar{v}_1 - 2\gamma)} \right\}$$

となる。この基本経路の極値は  $\bar{v}_1 = \frac{2}{3} (3 \pm \sqrt{3}) \gamma$  に対して  $f = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}} \beta \gamma^3$  であることは容易に得られる。また、式を一見して、対称解と非対称解が同じ荷重-変位関係を持つことは興味深い。三層トラス構造の場合も同様の手順で解析的に解くことができるが、ここではその詳細を割愛する。

### 3. 数値計算手法の概要

この種の問題は座屈現象を含むため、疑似的な動的問題に定式化した上で、ルンゲ・クッタ法により増分非線形問題を解いている。この際の質量、減衰定数および時間間隔は数値解析を安定化させるように設定している。荷重制御および変位制御手法の両者が適用可能である。また、このトラス構造の中心軸上の節点が変形に伴って別の節点を通り過ぎることのないよう、節点の接触問題を考慮した。仮想のパネ要素を追加し、節点間距離がある値より小さくなった場合にパネ剛性が値を持つような非線形計算を行っている。

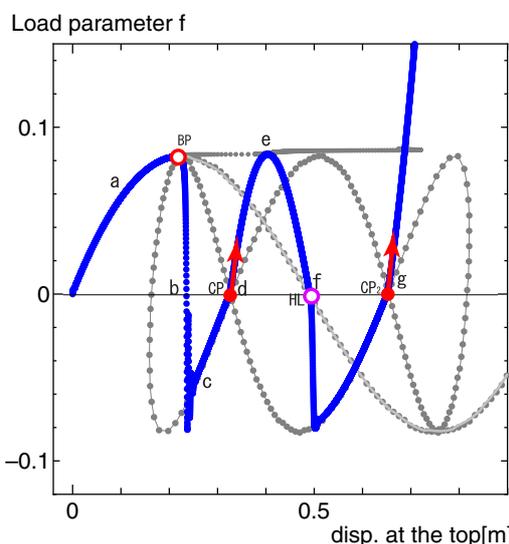


図-4 Numerical equilibrium path of 3 layer truss with contact effect

### 4. 解析結果

数値解析例として二層トラス (diamond truss) 変形つりあい経路の解析解を図-2 に示す。つりあい経路の Hill top から分岐経路に移行して非対称変形が生じている。

次に、図-3 に三層トラス構造の場合の解析解を示す。ダイヤモンドトラスでは分岐後の挙動の把握は容易であるが、三層トラス構造ではトラス各層での座屈が可能であり、分岐後経路は3種類に大きく分けられる。図-4 には、上層トラスが先に座屈する場合のシミュレーション結果を示している。上層トラスが一旦座屈すると上層と中層のトラス部材は重なり合って連動して動くため、次に下層トラスが座屈することになり、最後は3本のトラスが同調して動くため伸び剛性は3倍になっている。