有限変形問題における超弾性・粘弾性体の異方性構成則とそのマルチスケール解析への応用

○東北大学大学院　学生員　濱名康彰
東北大学大学院　正　員　寺田賢二郎

1. 緒言

繊維強化プラスチック（以下，FRP）は多くの工業製品に利用されており，FRP を材料として使用する場合，マトリクスのクリープ変形と強度を予測し，長期的な安全性を検討しなければならない．

しかし，FRP のような薄肉構造の材料実験を行う場合，試験片作成自体が困難な場合が多く，仮に実験的に材料パラメータを計測できても，FRP の挙動を適切に表現しうる異方性構成則が汎用 CAE に具備されていないため，解析は困難とされている．

そこで本研究では，FRP のミクロな材料モデルにマトリクス樹脂の動的粘弾性試験データを用いることにより，FRP の緩和弾性率を数値材料試験により計測し，算出した緩和弾性率から異方性構成則の材料パラメータを同定する方法を提案する．

2. マルチスケール解析のための異方性粘弾性構成則

2.1 ミクロ境界値問題

材料の非均質性を特徴づける周期的なミクロ構造（ユニットセル）について，物質点 $\boldsymbol{y} = y_j \boldsymbol{e}_j$ における変位関数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})$ は次式で定義される．

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) = \tilde{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{y}) \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{u}^*$ はミクロな非均質性に起因するミクロスケールの周期的な擾乱変位，$\tilde{\boldsymbol{E}}$ はマクロひずみであり，ミクロひずみのユニットセル体積平均で与えられる．

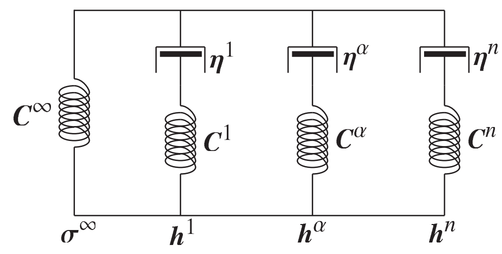
擾乱変位場 $\boldsymbol{u}^*$ の周期性より，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を有する境界面上のミクロトラクションベクトル $\boldsymbol{t}^{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$ には，ユニットセル境界 ∂Y における反対称性 $\boldsymbol{t}^{[j]} + \boldsymbol{t}^{[-j]} = \boldsymbol{0}$ が課せられる．ここで，$\boldsymbol{t}^{[\pm j]} := \boldsymbol{t}^{(\pm \boldsymbol{e}^{[j]})}$ と定義した．また，マクロ Cauthy 応力は，対応するミクロ応力のユニットセル体積平均であり，反対称条件から，

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\left|Y^{[j]}\right|} \int_{Y^{[j]}} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{y} = \frac{1}{\left|Y^{[j]}\right|} \int_{\partial Y_0^{[j]}} \boldsymbol{t}^{(\boldsymbol{n})} \otimes \boldsymbol{y} ds \tag{2}$$

で与えられるので，ミクロスケールの基底ベクトル $\boldsymbol{e}^{[j]}$ をマクロスケールにも転用すれば，次式を導くことができる．

$$\tilde{\boldsymbol{t}}^{[j]} = \frac{1}{\left|\partial Y^{[j]}\right|} \int_{\partial Y^{[j]}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e}^{[j]} ds = \frac{1}{\left|\partial Y^{[j]}\right|} \int_{\partial Y^{[j]}} \boldsymbol{t}^{[j]} ds \tag{3}$$

ここで，$\tilde{\boldsymbol{t}}^{[j]}$ は Y_j 面のマクロトラクションベクトル，$\left|\partial Y^{[j]}\right|$ はユニットセルの Y_j 面の表面積である．この式は，マクロ Cauthy 応力が，ミクロトラクションベクトルの表面積平均で算定しうることを意味している．



図– 1　異方性を考慮した一般化 Maxwell モデル

2.2 異方性粘弾性構成則

図–1 に異方性を考慮した一般化 Maxwell モデルを示す．$\boldsymbol{C}^\infty$ や $\boldsymbol{C}^\alpha$ は各弾性バネの異方的な弾性係数テンソルを，$\boldsymbol{\eta}_\alpha$ は各粘性ダッシュポットの粘性係数テンソルを表す．一般化 Maxwell モデル全体に作用する応力は，それぞれのバネにかかる応力（図中の $\boldsymbol{\sigma}^\infty$ や $\boldsymbol{h}^\alpha$）の和で表すことができる．

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^\infty + \sum_\alpha \boldsymbol{h}^\alpha \tag{4}$$

また，応力 $\boldsymbol{h}^\alpha$ の発展方程式は以下のように求められる．

$$\dot{\boldsymbol{h}}^\alpha + \boldsymbol{\tau}_\alpha^{-1} : \boldsymbol{h}^\alpha = \boldsymbol{\gamma}_\alpha : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^\infty \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{\tau}^\alpha = \boldsymbol{\eta}^\alpha : \boldsymbol{C}_\alpha^{-1}$，$\boldsymbol{\gamma}_\alpha = \boldsymbol{C}^\alpha : \boldsymbol{C}_\infty^{-1}$ は 4 階のテンソルであり，それぞれ緩和時間テンソル，リラクゼーションテンソルと呼ぶことにする．

式 (5) を応力 $\boldsymbol{h}^\alpha$ について解くと，一般化 Maxwell モデルに一定ひずみ $\bar{\varepsilon}\,(= \mathrm{const})$ を与えたときの応答応力は

$$\boldsymbol{h}^\alpha(t) = \boldsymbol{C}^\alpha : \exp\left(-t/\tau^\alpha\right) : \bar{\varepsilon} \tag{6}$$

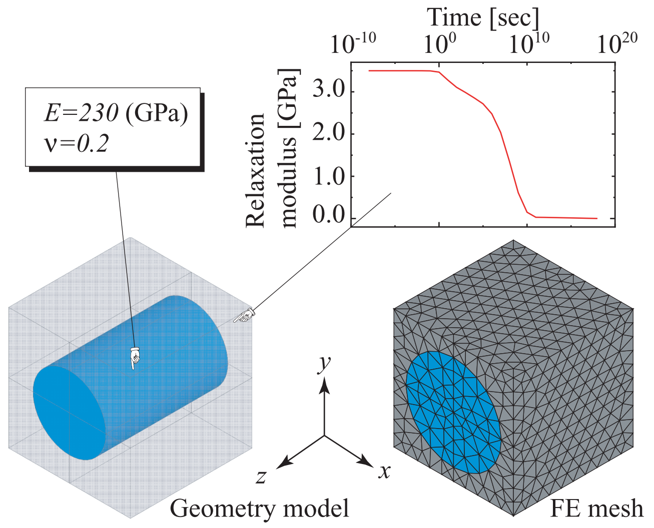
となる．式 (4) より，一般化 Maxwell モデル全体に作用する全応力は，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) &= \left[\boldsymbol{C}^\infty + \sum_\alpha \boldsymbol{C}^\alpha : \exp\left(-t/\tau^\alpha\right)\right] : \bar{\varepsilon} \\ &= \boldsymbol{C}_r(t) : \bar{\varepsilon} \end{aligned} \tag{7}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{C}_r(t)$ を緩和弾性係数テンソルと呼ぶ．さらに $t = 0$ のときの弾性係数テンソルが $\boldsymbol{C}^{\mathrm{ini}} = \boldsymbol{C}^\infty + \sum_\alpha \boldsymbol{C}^\alpha$ であることを考慮すると，緩和弾性係数テンソルは

$$\boldsymbol{C}_r(t) = \boldsymbol{C}^{\mathrm{ini}} - \sum_\alpha \boldsymbol{C}^\alpha \left(\boldsymbol{1} - \exp\left(-t/\tau^\alpha\right)\right) \tag{8}$$

と書き改められる．



図– 2 検証モデル：一方向繊維強化材

3. 異方性粘弾性構成則のパラメータ同定手法

3.1 数値材料試験における負荷パターンと採取データ

本研究が対象とする異方性粘弾性構成則について，パラメータを同定しようとする構成則にはひずみと応力のテンソル成分が用いられており，均質化法に基づく数値材料試験では，6 つの独立した変形パターンに対応する応答を計測する必要がある．すなわち，6 パターンの単位マクロひずみ $\hat{\tilde{\boldsymbol{E}}} = \mathbf{1}$ を与えることにより，マクロ緩和弾性係数テンソル $\hat{\tilde{\boldsymbol{C}}}_r$ の時刻歴応答データが数値的に得られることになる．

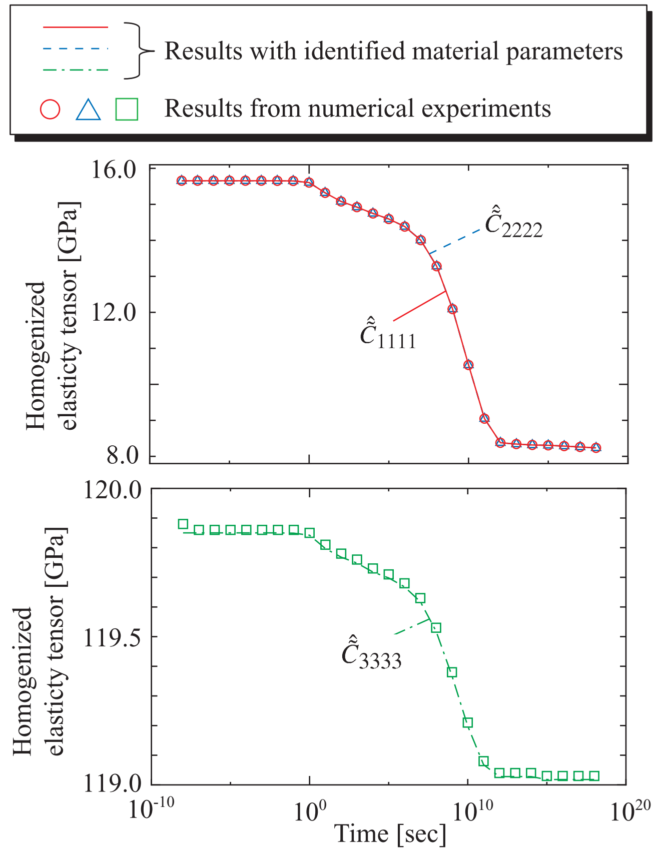
3.2 マクロ材料パラメータ同定手法

数値材料試験におけるマクロ変形の負荷パターン数を $n_{\mathrm{test}} = 6$ 個に固定し，各負荷パターン m に対する数値材料試験の結果として計測されるマクロ応答のデータ数を $n_{\mathrm{step}}^{[m]}$ とし，全計測時間 t を $n_{\mathrm{step}}^{[m]}$ 分割する．そして，負荷パターン m のミクロ解析ケースにおける，時刻 t_i （$i = 1, \ldots, n_{\mathrm{step}}^{[m]}$）のマクロ緩和弾性係数テンソルを $\hat{\tilde{C}}_{ijkl}^{[i,m]}$ と表す．負荷パターン m の数値材料試験の時刻 t_i におけるマクロ緩和弾性係数テンソルの 9 成分 $\tilde{C}_N^{[i,m]}$（$N = I, \ldots, IX$）の応答は，一般化 Maxwell モデルを仮定して次のように書ける．

$$\tilde{C}_N^{[i,m]}\left(C_N^{[\mathrm{ini}]}, C_N^{[\alpha]}\right) = \tilde{C}_N^{[i,m]}\left(C_N^{[l]}\right) \qquad (9)$$

ここで，$C_N^{[\mathrm{ini}]} = C_N^{[0]}$，$C_N^{[\alpha]} = C_N^{[l]}$，$g^{[\alpha]} = g^{[l,i,m]}$（$l = 0, \ldots, n_{\mathrm{Maxwell}}$）と置き換え，$g^{[0,i,m]} = 1$ を設けた．提案するパラメータ同定手法では，マクロひずみ $\hat{\tilde{E}}_{ij}^{[i,m]}$ を式 (9) の入力データとして算出されるマクロ緩和弾性係数テンソルの応答 $\tilde{C}_N^{[i,m]}$ と，実験データとして得られるマクロ緩和弾性係数テンソル $\hat{\tilde{C}}_N^{[i,m]}$ について，次の 2 乗誤差関数 χ_N を定義し，それぞれの成分についての最小化問題を考える．

$$\chi_N\left(C_N^{[l]}\right) = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{step}}^{[m]}} \left\| \tilde{C}_N^{[i,m]}\left(C_N^{[l]}\right) - \hat{\tilde{C}}_N^{[i,m]} \right\|^2 \qquad (10)$$



図– 3 数値材料試験とパラメータ同定結果の比較

これより，最終的に $\boldsymbol{C}^{\mathrm{ini}}$ や $\boldsymbol{C}^{\alpha}$ の成分の値が求まる．

3.3 パラメータ同定例

本節では一方向強化材を模擬したミクロ構造を対象として数値材料試験を行い，この結果を用いて異方性粘弾性構成則の材料パラメータを同定し，提案手法の妥当性を検証する．**図–2** に検証対象としたミクロ構造を示す．ファイバーおよびマトリクスには**図–2** に付記した材料パラメータをもつ炭素繊維およびエポキシ樹脂を使用する．

数値材料試験結果として，垂直成分の緩和弾性係数テンソルの時刻歴データを**図–3** に示す．なお，せん断成分および非対角成分については割愛する．等方的な樹脂をマトリクスとして，剛な繊維を配向したことにより，対応するマクロ応答は異方性が顕著に現れており，定性的には妥当な結果が再現されている．また，**図–3** には，提案した同定手法により求めたマクロ材料パラメータも示している．これより，数値材料試験結果と同定したパラメータを用いた構成則の応答はほぼ一致していることが分かる．

4. 結論

本研究では，FRP のミクロ構造に数値材料試験を適用することにより，マクロ材料パラメータ同定手法の提案を行った．今後は有限変形問題への拡張が課題となる．

参考文献

1) M.Kaliske: A formulation of elasticity and viscoelasticity for fibre reinforced material at small and finite strains, *Institute fur Statik, Universitat Hannover, Apperlstrabe 9a, 30167 Hannover, Germany*, Accepted 26 March 1999
2) 寺田賢二郎・菊池昇：均質化法入門，丸善株式会社，2003.