面外曲げを受ける平面セル構造体の非線形マルチスケール解析の精度に関する一考察

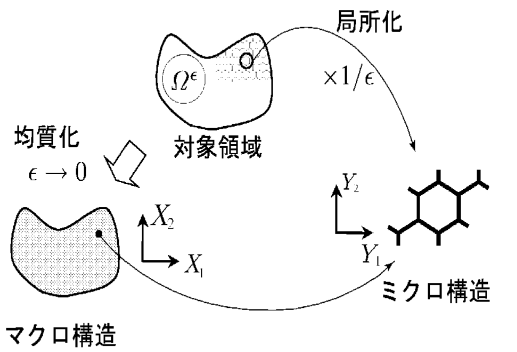
東北大学工学部 ○学生員 村上 和也
東北大学大学院工学研究科 正 員 斉木 功
東北大学大学院工学研究科 正 員 岩熊 哲夫

1. はじめに

平面セル構造体は，剛性や質量比などの観点から高機能な材料であり様々な用途に利用される．しかし，その力学的特性には，構造や荷重によって強い異方性，非線形性，座屈による不安定化などの特徴を示す．このような面内変形に対して，面内の非線形マルチスケール解析が大植ら[1)]によって行なわれた．平面セル構造体がジオテキスタイルなどに利用される場合は面内変形に加え面外変形も受ける．これに関しては，面外変形を考慮した線形ミクロスケール解析が本田ら[2)]によって行なわれた．本報告では面外変形を考慮したミクロスケールでの線形解析を発展させ, 幾何学的非線形性を考慮できる非線形マルチスケール解析手法を提案する．

2. 一般化収束論による平板の非線形 2 変数境界値問題の定式化

図–1 に示すような大きさ $\epsilon Y (\epsilon << 1)$ の平面骨組が面内に周期的に配置された構造物を解析対象とする．図中, Y として示された領域が $1/\varepsilon$ を乗じることにより拡大された微視構造であり, もとの対象領域ではこの微視構造の大きさが ϵY となる．この平板構造は, Kirchholf の仮定に従う薄肉平板と仮定し, 中立面を含む領域を Ω, その境界を $\partial\Omega$ とする．ここではこの解析対象に対し, 本田ら [2)] が示した一般化収束論による非線形 2 変数境界値問題への定式化の概要を示す.



図–1 平面セル構造体

面外たわみ w とたわみ角 $\boldsymbol{\theta}$ の関係 $\boldsymbol{\theta} = -\boldsymbol{\nabla} w$ を拘束条件とし, Lagrange の未定係数法により，この拘束条件を組み込んだ汎関数 Π

$$\Pi := \int W^{\mathrm{m}} \left(\nabla \boldsymbol{u} \nabla w\right) + \int W^{\mathrm{b}} \left(\nabla \boldsymbol{\theta}\right) \mathrm{d}\Omega - \int q w + \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u} \mathrm{d}\Omega - \int \boldsymbol{Q} \cdot \left(\nabla w + \boldsymbol{\theta}\right) \mathrm{d}\Omega \tag{1}$$

を定義すると, 平板の境界値問題はこの汎関数を停留させる問題となる．ここに, $\boldsymbol{f}$ は外力，$\boldsymbol{u}$ は面内変位，W^m, W^b はあおれぞれ面内変形，曲げのひずみエネルギ密度関数であり, 面内力-面内ひずみおよび曲げモーメント-曲率関係

$$N = \frac{\partial W^{\mathrm{m}}}{\partial \left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nabla w \bigotimes \nabla w}{2}\right)}, \qquad M = \frac{\partial W^{\mathrm{b}}}{\partial \nabla \boldsymbol{\theta}} \tag{2}$$

を規定するものとする．この汎関数の独立変数は ε，$\boldsymbol{\theta}$，w，$\boldsymbol{Q}$ であり $\boldsymbol{Q}$ は未定定数である．この汎関数 Π の $\varepsilon \to 0$ の極限すなわち均質化汎関数 Π^{H} は

$$\begin{aligned} \Pi^{\mathrm{H}} = &\int_\Omega W^{\mathrm{m}}(\nabla_x \boldsymbol{u}^0 + \nabla_y \boldsymbol{u}^1, \nabla_x w^0 + \nabla_y w^1)\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega W^{\mathrm{b}}(\nabla_x \boldsymbol{\theta}^0 + \nabla_y \boldsymbol{\theta}^1)\,\mathrm{d}\Omega \\ &- \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}^0 + q w^0 \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{Q} \cdot (\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 + \boldsymbol{\theta}^0)\,\mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{3}$$

となる．ここで上付きの 0 および 1 はそれぞれマクロスケール，ミクロスケールの属する物理量であることを意味する．このとき面内ひずみ $\boldsymbol{\nabla u}$，たわみ角 $\boldsymbol{\nabla} w$，曲率 $\boldsymbol{\nabla\theta}$ はそれぞれ

$$\nabla \boldsymbol{u} \to \nabla_x \boldsymbol{u}^0 + \nabla_y \boldsymbol{u}^1, \qquad \nabla \boldsymbol{w} \to \nabla_x \boldsymbol{w}^0 + \nabla_y \boldsymbol{w}^1, \qquad \nabla \boldsymbol{\theta} \to \nabla_x \boldsymbol{\theta}^0 + \nabla_y \boldsymbol{\theta}^1 \tag{4}$$

に収束することが一般化収束論により保証される．この均質化汎関数のマクロスケールの変数に関する停留条件から，マクロスケール釣合式

$$\nabla_x\nabla_x : \widetilde{\boldsymbol{M}} = \widetilde{\boldsymbol{N}} : \nabla_x\nabla_x w^0 - \widetilde{q} - \widetilde{\boldsymbol{f}} \cdot \nabla_x w^0 \tag{5}$$

および, ミクロスケールの変数に関する停留条件から，ミクロスケール釣合式

$$\nabla_y\nabla_y : \boldsymbol{M}^0 = \boldsymbol{N}^0 : \nabla_y\nabla_y w^1 + \nabla_y \cdot \boldsymbol{Q}^0 = 0 \tag{6}$$

が得られる．ここで $\widetilde{\bullet}$ は代表体積要素における平均量である．ミクロスケールの釣合式 (6) は実変形に起因する内力の自己釣り合い式になっており，マクロ変形 (曲率) に相当する相対変位 (ここでは回転角および変位) を境界条件として解析を行う．式 (4) で表される全曲率をミクロスケール y により積分することにより, 実回転角 λ は

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left\{\nabla_x\boldsymbol{\theta}^0(\boldsymbol{x})\right\} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\theta}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{7}$$

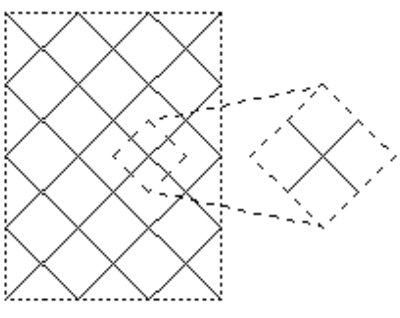
と表される．同様に, 実面外変位 ζ は式 (5) で表されるたわみ角をミクロスケール $\boldsymbol{y}$ により積分することにより

$$\zeta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{y} \cdot \left\{\nabla_x\boldsymbol{\theta}^0(\boldsymbol{x})\right\} \cdot \boldsymbol{y} + \left\{\nabla_x w^0(\boldsymbol{x})\right\} \cdot \boldsymbol{y} + w^1(\boldsymbol{y}) \tag{8}$$

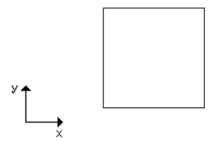
と表される．これらの実回転角，実面外変位を用いてミクロスケールでの周期性を考慮し, マクロ曲率 $\boldsymbol{\nabla}_x\boldsymbol{\theta}^0$ に相当する相対回転角，およびマクロたわみ角に相当する相対面外変位を代表体積要素に与えることで，その応答としてマクロ曲げモーメント $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ が算出可能となる．

3.　非線形解析例

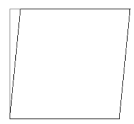
図–2 に示す正方形セルの網状の構造を平板として解析を行った．マクロ構造は**図–3** に示す一辺の長さ L の平板要素で，ミクロ構造は**図–4** のように単位周期構造を 2×2 用いて骨組要素でモデル化し一辺の長さ ℓ の代表体積要素とした．ミクロ構造には $\ell \times 10^{-5}$ 程度の初期不整を与えている．平板構造に対して面内単純せん断変位を与え，解析を行った．境界条件はマクロ構造の下辺を 3 方向変位のみ拘束し，上辺は $L \times 10^{-1}$ の x 方向変位を与え，y，z 方向変位を 0 とした．上辺の変位が $2.5L \times 10^{-2}$ のときミクロ構造が座屈した．座屈直後の変形の様子を**図–5，6** に示す．**図–6** のみ変位を実際の 10 倍にして示している．



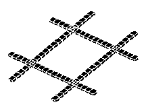
図–2　解析対象平板とその単位周期構造



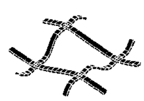
図–3　マクロ構造



図–5　変形後マクロ構造



図–4　ミクロ構造



図–6　変形後ミクロ構造

参考文献

1) 大植　健，斉木　功，寺田賢二郎，中島章典: 骨組要素を用いたセル構造材料のための非線形マルチスケールモデリング，土木学会論文集，No.724/I-62，pp.249-256，2003.

2) 斉木　功，本田宏孝，岩熊哲夫，中島章典: 一般化収束論による平板構造に対する非線形均質化理論の適用， 応用力学論文集，Vol.9, pp.203-210, 2006.