

Timoshenko はり理論を用いたコンクリートの温度応力解析

東北学院大学大学院 学生会員 ○渡部真紀子
 東北学院大学 正会員 石川 雅美
 名古屋大学名誉教授 正会員 田辺 忠顕
 東北学院大学 フェロー 遠藤 孝夫

1 背景と目的

CP法は、マスコンクリートの温度応力解析手として最も一般的に用いられている。図-1に示すようなボックスカルバートなどの壁状構造物において、ひび割れ誘発目地の応力を算出する場合、誘発目地間隔を l とすると、壁の高さ h に対する比率、すなわち l/h が1に近くなる場合も少なくない。しかしながら、CP法ははり理論を基に定式化がなされているため、 l/h が小さくせん断変形が卓越するような場合には、その解析精度が低下することが確かめられている¹⁾。そこで本研究では、せん断変形を考慮することのできるTimoshenkoはり理論をCP法に導入し、 l/h が小さい場合でも精度よく解析できる手法を提案する。

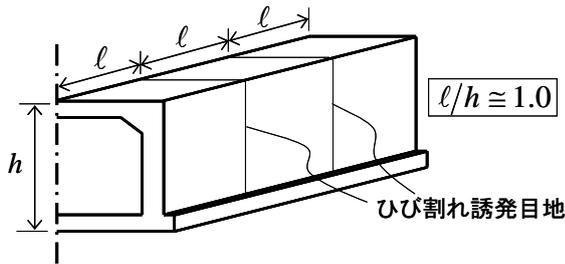


図-1：ボックスカルバートの誘発目地

2 Timoshenko はり理論

Timoshenko はり理論は曲げによるたわみのみを扱うBernoulli-Eulerはり理論にせん断変形を追加したものである。すなわち、図-2に示すようにはり全体のたわみは、曲げによるたわみ v_b とせん断によるたわみ v_s の和として考える。

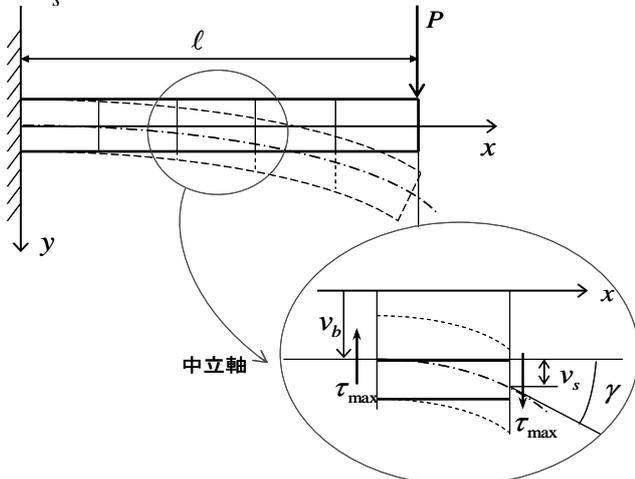


図-2：曲げによるたわみとせん断によるたわみ

例えば、図-3に示す長さ l の片持ばりの先端に集中荷重 P が作用する場合、先端のたわみの理論解は次式で与えられる。

$$v = v_b + v_s = \frac{Pl^3}{3EI} + \kappa \frac{Pl}{GA} \quad \dots (1)$$

ここで、 E ：弾性係数、 I ：断面二次モーメント、 κ ：長方形断面の場合 $3/2$ 、 G ：せん断弾性係数、 A ：断面積である。

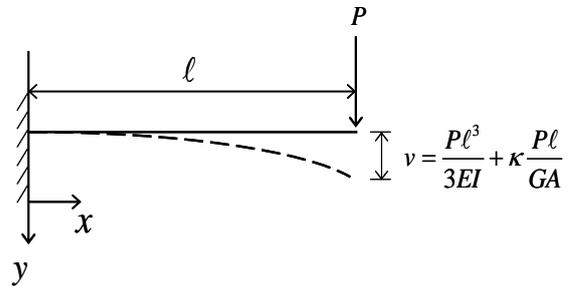


図-3：片持ばりの例

3 Timoshenko はり理論の離散化

図-4に示すはりにおいて、鉛直下向きの曲げによる変位 v_b を次の変位関数を用いて表す。

$$v_b = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 \quad \dots (2)$$

せん断による変位 v_s は

$$v_s = \kappa \frac{EI}{GA} \frac{\partial^2 v_b}{\partial x^2} \quad \dots (3)$$

$$= 2\kappa \frac{EI}{GA} C_3 + 6\kappa \frac{EI}{GA} C_4x$$

と表される。また、たわみ角 θ は

$$\theta = \frac{\partial v_b}{\partial x} \quad \dots (4)$$

である。最終的に、図-4のような部材の剛性マトリクス K は

$$K = \begin{bmatrix} \frac{A}{l}E & 0 & 0 & -\frac{A}{l}E & 0 & 0 \\ 0 & \kappa \frac{GA}{l} & -\kappa \frac{GA}{2} & 0 & -\kappa \frac{GA}{l} & -\kappa \frac{GA}{2} \\ 0 & -\kappa \frac{GA}{2} & \frac{EI}{l} + \kappa \frac{GA}{3} & 0 & -\kappa \frac{GA}{2} & -\frac{EI}{l} + \kappa \frac{GA}{6} \\ -\frac{A}{l}E & 0 & 0 & \frac{A}{l}E & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa \frac{GA}{l} & \kappa \frac{GA}{2} & 0 & \kappa \frac{GA}{l} & \kappa \frac{GA}{2} \\ 0 & -\kappa \frac{GA}{2} & -\frac{EI}{l} + \kappa \frac{GA}{6} & 0 & \kappa \frac{GA}{2} & \frac{EI}{l} + \kappa \frac{GA}{3} \end{bmatrix} \quad \dots (5)$$

で与えられる。

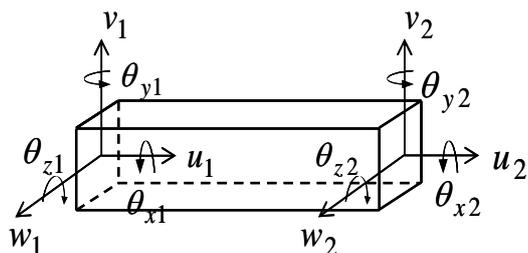


図-4：はり部材の変形

4 Timoshenko はりの解析結果の検討

理論解と比較するために、有限要素法の平面ラメンのプログラムを用いて図-5 に示すようなはりの計算を行う。

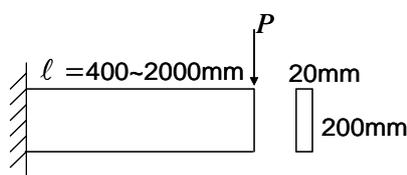


図-5：解析モデル

表-1：Timoshenko はり

l (mm)	l/h	理論解 (mm)	要素数	解析解 (mm)	誤差 (%)
400	2	B:11.43	5	13.65	3.94
		T:14.21	10	14.07	1.02
		(19.60%)	50	14.21	0.04
800	4	B:91.43	5	83.33	14.10
		T:97.00	10	93.18	3.94
		(5.74%)	50	96.84	0.16
2000	10	B:1428.57	5	712.12	50.63
		T:1442.50	10	1148.12	20.41
		(0.97%)	50	1427.86	1.01

表-1 は Timoshenko はり理論の解析結果である。理論解の欄で、B および T と表しているのは Bernoulli-Euler および Timoshenko はり理論の理論解である。また、括弧内は Timoshenko はり理論に対する Bernoulli-Euler はり理論の理論解の誤差である。精度向上のため、要素数 5,10,50 の 3 パターンを計算している。

この結果から l が長くなるにしたがって誤差が増加傾向にあることがわかる。このことから、材軸方向の要素分割を 10 以上とすれば、数%の誤差にとどまるものと思われる。その場合、 l/h を 4 以下程度として用いるのが望ましい。

5 CP 法への拡張

図-6 に示すモデルを用いて温度応力を計算する。ここで M_0, N_0 は温度ひずみから求まる CP 法のモーメントと軸力である。これにそれぞれ R_M, R_N (外部拘束係数) を乗じたものを M, N としてはりモデルにかける(図-6)。また、地盤のバネとして地盤反

力係数 $k_v = 1.0 \times 10^{10}$ kN/m を式(5)の $K(2,2)$ および $K(5,5)$ の項に加算する。

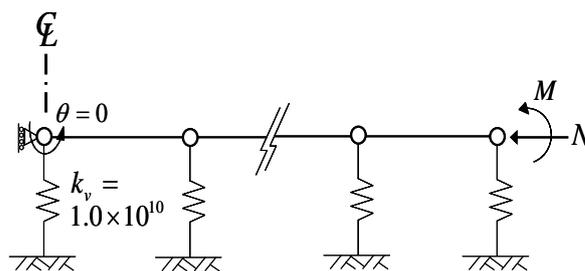


図-6：地盤反力係数の導入

最終的に、Timoshenko はりと CP 法の比較のため図-7 のようなコンクリートの応力を計算する。

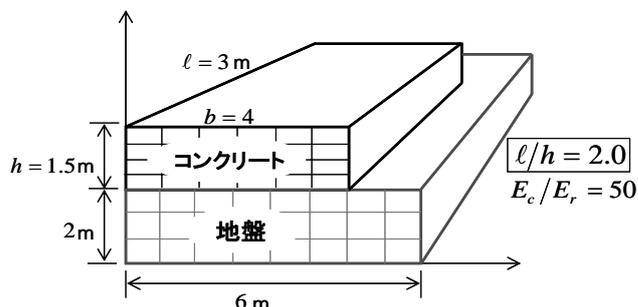


図-7：地盤上のコンクリートはりモデル

図-8 は、式(5)を用いてせん断変形を考慮した解析結果(図中に Timo として示す)と従来の CP 法の解析結果(CP として示す)の比較である(L:最下層、M:中層、U:上層)。

Timoshenko はり理論を用いた場合 CP 法よりも一般的に大きな応力を示す結果となった。これはこの理論の場合には、地盤のバネ定数の設定によって解析値が影響を受けるため、今後は適切なバネ係数を検討していく必要がある。

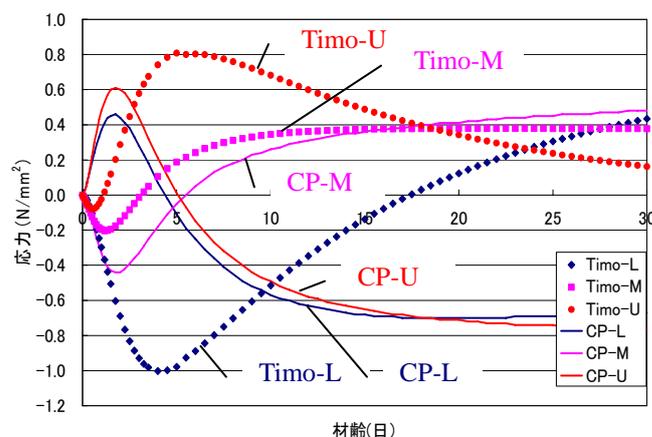


図-8：Timoshenko はり理論と CP 法との比較

* 参考文献
 1) マスコンクリートの温度応力委員会報告書 外部拘束係数の見直しと CP 法の適用範囲の拡大, 日本コンクリート工学協会, 1998.
 2) 山田貴博: 高性能有限要素法, 丸善, 2007.
 3) 渋谷寿一他: 現代材料力学, 朝倉書店, 1986.