

下負荷面 Cam-clay モデルの応力積分法の開発と地盤支持力解析への適用性検証

東北大学 学生会員 ○藤澤利光
 東北大学 正会員 山川優樹
 東北大学 正会員 池田清宏

1. 序論

締固められた状態にある基礎地盤では、基礎の沈下に伴いピーク強度を示した後、せん断ひずみの局所化を伴う進行性破壊を生じ残留強度に至る。密な砂や、過圧密粘土に見られる硬化・軟化挙動を表現する弾塑性モデルとして、橋口ら¹⁾が下負荷面 Cam-clay モデルを提案している。

本研究では高精度でロバストな下負荷面 Cam-clay モデルの応力積分アルゴリズムを開発する。また、地盤材料の重要な性質である三軸圧縮・伸張側での降伏強度の違い、すなわち Lode 角依存性を構成モデルに導入する。

2. 陰解法応力積分アルゴリズム

ここでは下負荷面 Cam-clay モデルに対する陰解法応力積分法を提案する。等方材料に限定し、弾性対数主ひずみ空間でリターンマッピングを行う方法を採用する。変形勾配 F を弾性・塑性部分に乗算分解し $F = F^e \cdot F^p$ とし、体積変化 J は

$$J = \det F = \det(F^e \cdot F^p) = \det F^e \det F^p = J^e J^p \dots (1)$$

と与えられる。主ストレッチを λ_A ($A = 1, 2, 3$) とし、それらの弾性・塑性部分は $J^e = \lambda_1^e \lambda_2^e \lambda_3^e$, $J^p = \lambda_1^p \lambda_2^p \lambda_3^p$ となる。対数主ひずみは $\varepsilon_v = \log(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ と与えられる。ここで用いる、下負荷面 Cam-clay モデル降伏関数は

$$f(p, q, \theta; p_c, R) = \frac{\zeta_f^2(\theta) q^2}{M^2} + p(p - R \cdot p_c) \leq 0 \dots (2)$$

と表される。ここで、不変量として等方応力 $p = \frac{1}{3} \text{tr}[\sigma]$ 、偏差応力 $q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\text{dev}[\sigma]\|$ 、Lode 角 $\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}}$ とし、 $\zeta_f(\theta)$ は Lode 角依存性を表現する関数である。また、 R は正規降伏面と下負荷面の相似比とし、 $R \cdot p_c$ は下負荷面の大きさとなる。

塑性挙動における応力偏角 (Lode 角) 依存性を考慮した構成モデルでは、リターンマッピングの際に、増分形式の塑性流れ則を次式のように主ひずみ 3 成分についての式として表すことができる。

$$\varepsilon_{A,n+1}^e = \varepsilon_{A,n+1}^{e,(\text{trial})} - \frac{\Delta\lambda}{J_{n+1}} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \sigma_A} \quad (A = 1, 2, 3) \dots (3)$$

ここで、上付きの (trial) は試行値を表し、 $\Delta\lambda$ は増分表示の塑性乗数を表す。塑性硬化則の増分形式は、

$$p_{c,n+1} = p_{c,n} \exp[-\Theta(\varepsilon_{v,n+1}^{e,(\text{trial})} - \varepsilon_{v,n+1}^e)] \dots (4)$$

とし、ここで $\Theta = \frac{1}{\lambda - (1 - \lambda \kappa^*)}$ は塑性硬化係数である。次に、下負荷面係数 R の発展則は増分表示で次式で表す。

$$R_{n+1} - R_n = \Delta\lambda \mathcal{R}(R_{n+1}) \dots (5)$$

ここで、 $\mathcal{R}(R)$ は R の発展を規定する関数である。以上より、リターンマッピングでは、 $f(p, q, \theta; p_c, R) = 0$ の条件の下で式 (3), (5) を $\varepsilon_{A,n+1}^e$, R_{n+1} , $\Delta\lambda$ について解くことになる。残差ベクトル $r(x)$ および未知量ベクトル x は次のように定義する。

$$r(x) = \begin{bmatrix} J_{n+1} \varepsilon_{A,n+1}^e - J_{n+1} \varepsilon_{A,n+1}^{e,(\text{trial})} + \Delta\lambda \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \sigma_A} \\ R_{n+1} - R_n - \Delta\lambda \mathcal{R}(R_{n+1}) \\ f(p_{n+1}, q_{n+1}, \theta_{n+1}; p_{c,n+1}, R_{n+1}) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \varepsilon_{A,n+1}^e \\ R_{n+1} \\ \Delta\lambda \end{bmatrix}, \quad (A = 1, 2, 3) \dots (6)$$

以下では非線型方程式 $r(x) = 0$ を x について線形化し、反復解法により解くことになる。第 k 回目の反復での修正量を δx とし、

$$r(x^k) + A^k \delta x = 0, \quad A^k := \frac{\partial r(x^k)}{\partial x} \rightsquigarrow \begin{cases} \delta x^k = -[A^k]^{-1} r(x^k), \\ x^{k+1} = x^k + \delta x^k \end{cases} \dots (7)$$

というように $\|r(x)\| < \text{TOL}$ となるまで x の更新を繰り返す。

また、リターンマッピングのアルゴリズムに整合した接線係数を

$$c_{n+1}^{\text{ep}} := \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon_{n+1}^{e,(\text{trial})}} \dots (8)$$

とすることにより、Newton-Raphson 法本来の 2 次収束を確保することが出来る。

3. 陰解法応力積分アルゴリズムの性能検証

一要素の三軸圧縮解析を行い、第 2 章で提案する応力積分アルゴリズムの性能を検証する。所定の変形量を異なるステップ数に分割して与え、Newton-Raphson 法によるリターンマッピングの繰り返し計算に増分ステップサイジングの影響を検証する。初期状態を等方圧状態とし、硬化・軟化を示す過圧密比 $\text{OCR} = 10$ とした過圧密状態の地盤材料に対し、変形量の所定量を $N_{\text{step}} = 6, 10, 100, 10000$ と等分割する。図-1(a) に応力-ひずみ関係を示

す．三軸試験において残留状態を示す大変形に至るまで $N_{step} = 6$ でその経路が追えている．また，図-1(b) に所定の変形量に至る最終ステップでのリターンマッピングの際の誤差ノルム $\|r(x)\|$ の収束状況を示す． $N_{step} = 6$ の場合に注目すると，反復計算 1 回目の誤差は 10^0 オーダーであるが，その後良好な収束状況を示しており，少ない増分ステップにより追跡した大変形時においても，リターンマッピングにより得られる応力の精度の高さが確認できる．また，図-1(c) は応力-ひずみ関係の経路追跡の際の Newton-Raphson 法における誤差の収束状況を示す．この場合も $N_{step} = 6$ のように少ない増分ステップでも Newton-Raphson 法本来の 2 次収束が見られる．以上より，大きな増分ステップでもロバスト性の高い経路追跡が可能であることが示される．

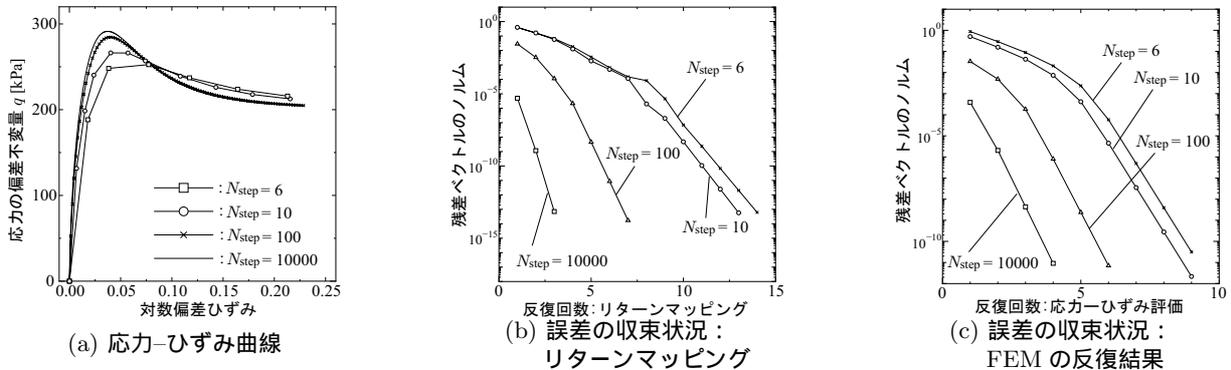


図-1 一要素の三軸圧縮解析による性能評価

4. 3次元基礎の支持力解析

3次元基礎の定性的な検討を行うため，図-2 に示す 1600 要素半領域モデルを用いた軸対称解析により円形基礎の支持力解析を行う．ここでは，解析に用いる物性値はせん断弾性係数 $\mu_0 = 20\text{MPa}$ ， μ の等方応力依存性 $\alpha = 400$ ，弾性圧縮係数 $\tilde{\kappa} = 0.003$ ，弾塑性圧縮係数 $\tilde{\lambda} = 0.008$ ，摩擦角 $\phi = 20^\circ$ とし，上載圧 20kPa に対し先行圧密応力 $p_{c0} = 2000\text{kPa}$ を設定し，過圧密比 $\text{OCR} = 100$ とした．

Lode 角依存性の影響を検討するため，三軸圧縮・伸張状態に基づいた偏差応力面において円形となる，Lode 角依存性の無い降伏面形状を用いた場合と比較する．また，地盤の初期応力状態の影響を考慮するため，静止土圧係数 $K_0 = \sigma_h/\sigma_v \neq 1$ の鉛直方向と水平方向で異なる状態を設定し等方圧状態との比較を行う．

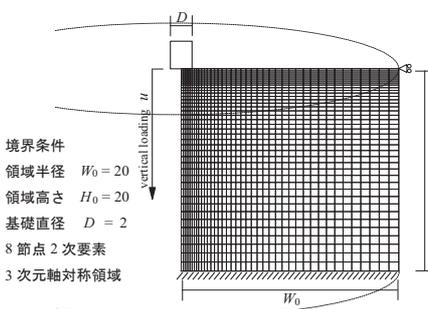


図-2 3次元基礎解析モデル

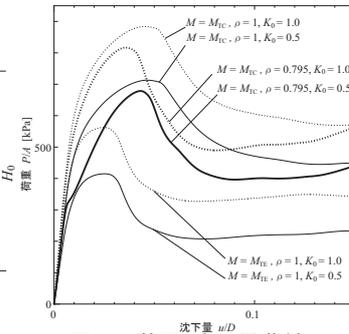


図-3 荷重-沈下量曲線

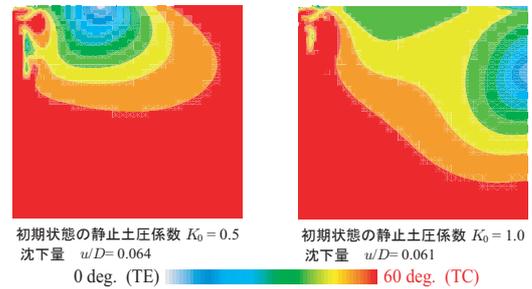


図-4 地盤内の Lode 角分布

図-3 に Lode 角非依存型の三軸圧縮・伸張状態に基づく弾塑性モデルを用いた場合と，Lode 角依存型モデルを用いた場合の，各々に対し $K_0 = 1.0, 0.5$ の状態により得られる荷重-変位曲線を示す．

$K_0 = 1.0$ の場合の荷重-変位曲線に着目すると，荷重はピーク値付近までは三軸圧縮型の曲線に近い形となっているが，その後の荷重低下挙動において，圧縮・伸張それぞれの曲線の中間程度の荷重値を示した後，残留状態では圧縮側に近づく． $K_0 = 0.5$ の荷重-変位曲線を観察すると，Lode 角依存型・非依存型とも荷重のピーク値・残留値は $K_0 = 1.0$ の等方圧状態と比較し低下している．特に，Lode 角依存型モデルによる曲線は $K_0 = 1.0$ と 0.5 の場合と異なる荷重低下挙動が得られている．また，図-4 に Lode 角依存型モデルを用いた場合の $K_0 = 0.5, K_0 = 1.0$ の各々の荷重低下挙動時における Lode 角分布を示す．図中左上の基礎周辺部では，どちらも圧縮・伸張状態が複雑に分布していることと，初期状態の K_0 値により異なる Lode 角分布の進展が見られることから，Lode 角依存型モデルを用いた場合の荷重-変位曲線の挙動が Lode 角の影響を反映していることがいえる．

5. 結論

非古典弾塑性構成モデルとして，下負荷面 Cam-clay モデルを陰解法応力積分アルゴリズムへ導入した解析を行い，その軟化挙動等の実現象に基づく現象を精度良く求められたことにより，解析コードの有用性を示すことができた．また，この解析手法を支持力問題に適用し，その挙動に与える Lode 角および土圧係数の影響を表現することができた．

参考文献

- 1) 橋口公一，上野正実，陳忠平：下負荷面および回転硬化の概念に基づく土の弾塑性構成式，土木学会論文集，No. 547, pp. 127-144, 1996.