平面セル構造体の面外曲げ挙動に関する非線形マクロ・ミクロ連立解析

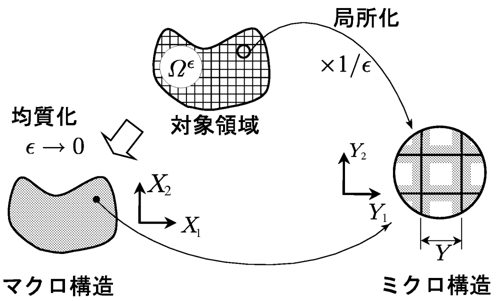
東北大学大学院工学研究科　○学生員　本田　宏孝
東北大学大学院工学研究科　　正 員　　斉木　功
東北大学大学院工学研究科　　正 員　　岩熊　哲夫

1.　はじめに

平面セル構造体は，剛性や重量比などの観点から高機能な材料であり様々な用途に利用される．しかし，その力学的特性は, 条件によって強い異方性，非線形性を示し，ときには座屈による不安定化を引き起こす．材料の力学的特性はその材料の微視的構造に由来しており微視的な幾何構造の影響を考慮できる点でマルチスケール解析は有効である．平面セル構造体の面内非線形マクロミクロ連立解析が大植ら [1] によって行なわれた一方で，平面セル構造体がジオテキスタイルなどに利用される場合は，面内変形に加え面外変形も考慮する必要がある．これに対して，面外変形を考慮した非線形ミクロスケール解析の定式化が著者らによってなされた [2]．本報告では著者らの定式化に従い，面外変形を考慮した平面セル構造体のマクロミクロ連立解析を行う．

2.　一般化収束論による平板の非線形 2 変数境界値問題の定式化

図–1 に示すような大きさ $\epsilon Y\,(\epsilon << 1)$ の平面骨組が面内に周期的に配置された構造物を解析対象とする．**図–1** 中, Y として示された領域が $1/\varepsilon$ を乗じることにより拡大された微視構造であり，もとの対象領域ではこの微視構造の大きさが ϵY となる．この平板構造は, Kirchholf の仮定に従う薄肉平板と仮定し，中立面を含む領域を Ω, その境界を $\partial\Omega$ とする．ここではこの解析対象に対し, 著者ら [2] が示した一般化収束論による非線形 2 変数境界値問題への定式化の概要を示す．



図–1　平面セル構造体

面外たわみ w とたわみ角 $\boldsymbol{\theta}$ の関係 $\boldsymbol{\theta} = -\boldsymbol{\nabla} w$ を拘束条件とし, Lagrange の未定係数法により，この拘束条件を組み込んだ汎関数 Π

$$\Pi := \int W^{\mathrm{m}}\left(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla w\right) + \int W^{\mathrm{b}}\left(\nabla \boldsymbol{\theta}\right) \mathrm{d}\Omega - \int qw + \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Omega - \int \boldsymbol{Q}\cdot\left(\nabla w + \boldsymbol{\theta}\right)\mathrm{d}\Omega \quad (1)$$

を定義すると, 平板の境界値問題はこの汎関数を停留させる問題となる．ここに, $\boldsymbol{f}$ は外力，$\boldsymbol{u}$ は面内変位，W^m, W^b はあおれぞれ面内変形，曲げのひずみエネルギ密度関数であり，面内力 - 面内ひずみおよび曲げモーメント - 曲率関係

$$N = \frac{\partial W^{\mathrm{m}}}{\partial\left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nabla w \bigotimes \nabla w}{2}\right)}, \qquad M = \frac{\partial W^{\mathrm{b}}}{\partial \nabla \boldsymbol{\theta}} \quad (2)$$

を規定するものとする．この汎関数の独立変数は ε，$\boldsymbol{\theta}$，w，$\boldsymbol{Q}$ であり $\boldsymbol{Q}$ は未定定数である．この汎関数 Π の $\varepsilon \to 0$ の極限すなわち均質化汎関数 Π^{H} は

$$\begin{aligned}\Pi^{\mathrm{H}} = &\int_\Omega W^{\mathrm{m}}(\nabla_x \boldsymbol{u}^0 + \nabla_y \boldsymbol{u}^1, \nabla_x w^0 + \nabla_y w^1)\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega W^{\mathrm{b}}(\nabla_x \boldsymbol{\theta}^0 + \nabla_y \boldsymbol{\theta}^1)\,\mathrm{d}\Omega \\ &- \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}^0 + qw^0\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{Q}\cdot(\nabla_x w^0 + \nabla_y w^1 + \boldsymbol{\theta}^0)\,\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \quad (3)$$

となる．ここで上付きの 0 および 1 はそれぞれマクロスケール，ミクロスケールの属する物理量であることを意味する．このとき面内ひずみ $\boldsymbol{\nabla u}$，たわみ角 $\boldsymbol{\nabla} w$，曲率 $\boldsymbol{\nabla\theta}$ はそれぞれ

$$\nabla \boldsymbol{u} \to \nabla_x \boldsymbol{u}^0 + \nabla_y \boldsymbol{u}^1, \qquad \nabla \boldsymbol{w} \to \nabla_x \boldsymbol{w}^0 + \nabla_y \boldsymbol{w}^1, \qquad \nabla \boldsymbol{\theta} \to \nabla_x \boldsymbol{\theta}^0 + \nabla_y \boldsymbol{\theta}^1 \quad (4)$$

に収束することが一般化収束論により保証される．

この均質化汎関数のマクロスケールの変数に関する停留条件から，マクロスケール釣合式

$$\nabla_x \nabla_x : \widetilde{\boldsymbol{M}} = \widetilde{\boldsymbol{N}} : \nabla_x \nabla_x w^0 - \widetilde{q} - \widetilde{\boldsymbol{f}} \cdot \nabla_x w^0 \quad (5)$$

および, ミクロスケールの変数に関する停留条件から，ミクロスケール釣合式

$$\nabla_y \nabla_y : \boldsymbol{M}^0 = \boldsymbol{N}^0 : \nabla_y \nabla_y w^1 + \nabla_y \cdot \boldsymbol{Q}^0 = 0 \quad \cdots\cdots (6)$$

が得られる．ここで $\tilde{\bullet}$ は代表体積要素における平均量である．

ミクロスケールの釣合式 (6) は実変形に起因する内力の自己釣り合い式になっており，マクロ変形 (曲率) に相当する相対変位 (ここでは回転角および変位) を境界条件として解析を行う．式 (4) で表される全曲率をミクロスケール y により積分することにより, 実回転角 λ は

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left\{ \nabla_x \boldsymbol{\theta}^0(\boldsymbol{x}) \right\} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\theta}^1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \quad \cdots\cdots (7)$$

と表される．同様に, 実面外変位 ζ は式 (5) で表されるたわみ角をミクロスケール $\boldsymbol{y}$ により積分することにより

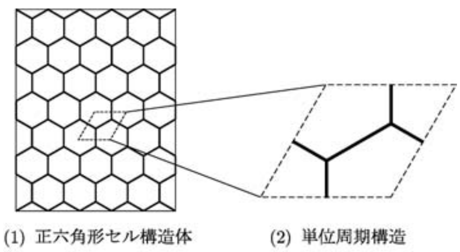
$$\zeta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{y} \cdot \left\{ \nabla_x \boldsymbol{\theta}^0(\boldsymbol{x}) \right\} \cdot \boldsymbol{y} + \left\{ \nabla_x w^0(\boldsymbol{x}) \right\} \cdot \boldsymbol{y} + w^1(\boldsymbol{y}) \quad \cdots\cdots (8)$$

と表される．これらの実回転角，実面外変位を用いてミクロスケールでの周期性を考慮し, マクロ曲率 $\boldsymbol{\nabla}_x \boldsymbol{\theta}^0$ に相当する相対回転角，およびマクロたわみ角に相当する相対面外変位を代表体積要素に与えることで，その応答としてマクロ曲げモーメント $\bar{\boldsymbol{M}}$ が算出可能となる．

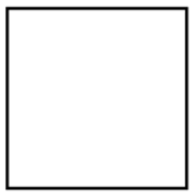
実際の解析ではまずミクロスケールの構造に単位変形を与えて均質化接線係数を求め，それを元にマクロスケールを計算しマクロスケールのガウス点ごとにミクロスケールの応答を求めることになる．

3. 非線形解析結果

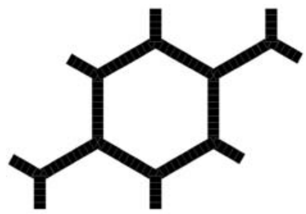
図–2 に示す平板構造の解析を行った．ここではマクロスケールは**図–3** に示す 12 自由度板曲げ平板要素，ミクロスケールは骨組要素でモデル化した．ミクロスケールにおける代表体積要素は**図–4** のように 2×2 の単位周期構造とした．面外たわみと面内引張変位を与えて幾何剛性の影響を解析した．境界条件は 1 辺を変位，回転ともに拘束し，1 辺に引張変位と面外たわみを与えた．変形の様子を**図–5，6** に示す。



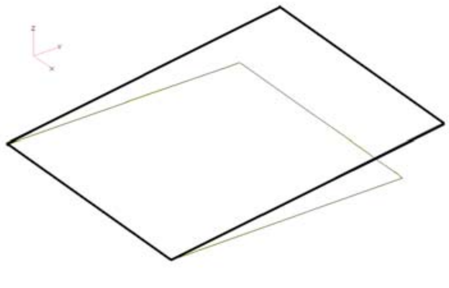
図–**2** 解析対象の平板構造



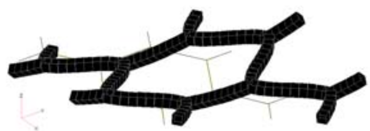
図–**3** マクロ構造



図–**4** ミクロ構造



図–**5** マクロスケールの変形形状



図–**6** ミクロスケール (代表体積要素) の変形形状

参考文献

1) 大植健，斉木功，寺田賢二郎，中島章典: 骨組要素を用いたセル構造材料のための非線形マルチスケールモデリング，土木学会論文集，No.724/I-62，pp.249-256，2003.
2) 斉木功，本田宏孝，岩熊哲夫，中島章典: 一般化収束論による平板構造に対する非線形均質化理論の適用，応用力学論文集，Vol.9，pp.203-210，2006.