2軸圧縮を受けるハニカムの分岐パターン

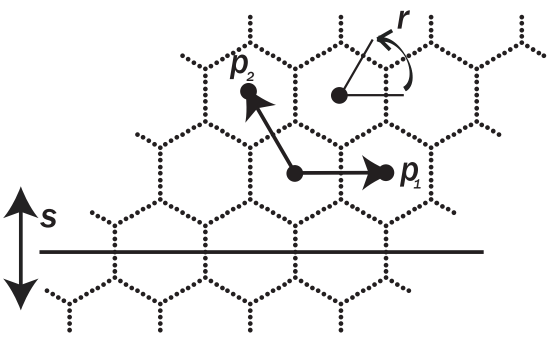
東北大学 学生会員 石川太郎○
東北大学 正会員 池田清宏
東北大学 正会員 斉木 功

1. はじめに

ハニカム材料は多くの対称性を有しているため，多重分岐が発生しやすいことが知られている．本研究では，新たな分岐モードを発見すべく 4×4 ハニカムモデルに二軸圧縮を加え，面内分岐解析を行った．その結果，6 重分岐点において並進対称性，二軸対称性，120 度回転対称性，60 度回転対称性を持つモードが存在することを確認した．このような多重分岐点では，接線剛性行列のゼロ固有値に対応する独立な固有ベクトルの線形和も固有ベクトルになり，分岐解の方向が特定されないという問題が生じる．この問題の解決策として，群論的分岐理論による分岐解の対称性の情報を使用した．

2. 本研究の目的

例えば 2×2 セルモデルを用いた分岐解析では，3 重分岐において並進対称モード，二軸対称モード，回転対称モードの 3 種類の分岐解が存在することが確認されている[1) 2)]．また，斉木らは群論的分岐理論により，2×2 セルモデルの分岐解を分類している[3)]．本研究ではより多くの分岐解の発見を目指し，**図–1** に示す 4×4 のモデルに面内等二軸圧縮を加え，分岐解析を行った．



図–1 4×4 モデル

3. 分岐解析手法

本研究では等変位法と群論的分岐理論による知見を組み合わせることにより分岐解を探索する．

多重分岐点 (多重度 M) における接線剛性行列のゼロ固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{\eta}_c$ はその線形独立な基底ベクトル $\boldsymbol{\eta}_i$ $(i=1,\cdots,M)$ を用いて，

$$\boldsymbol{\eta}_c=\sum_{i=1}^{M}C_i\boldsymbol{\eta}_i \qquad C_i: \text{各モードの振幅} \tag{1}$$

と表わす事が出来る．無限に存在する C_i $(i=1,\cdots,M)$ の組み合わせの内，$\boldsymbol{\eta}_c$ が分岐解となる組み合わせはその内の有限個であり，分岐経路の追跡に際してはこの具体的な組み合わせを求めることが必要不可欠である．この組み合わせを求める方法論として，

- 成島が行った等変位法は，半経験的な方法論であり，正六角形のある複数の節点の特定の方向への変位が等しいという条件を色々と与えて，得られた $C_1\sim C_M$ に関する連立方程式を解き，$C_1\sim C_M$ の組を決定している．
- 群論的分岐理論では，分岐方程式を系の対称性を考慮して解く事により，$C_1\sim C_M$ を厳密に求めている．

があり，この 2 つの方法を組み合わせることによりハニカムの分岐パターンを求めることする。

4. 群論的分岐理論

この 4×4 モデルに生じる 6 重分岐点 $(M=6)$ に対する分岐理論が斉木により提案されている[4)]．この理論による方法に就いて簡潔にまとめる．$C_1\sim C_6$ を未知変数 $w_1\sim w_6$ と書き直すが，このとき固有ベクトルのペア $\boldsymbol{\eta}_i$ と $\boldsymbol{\eta}_{i+1}$ $(i=1,3,5)$ はある特定の方向への並進対称性を持つように選ぶ．さらに，複素変数 $z_i=w_i+iw_{i+1}$ $(i=1,3,5)$ を導入する．このとき，分岐方程式は，

$$F_1(f,z_1,z_2,z_3)=F_2(f,z_1,z_2,z_3)=F_3(f,z_1,z_2,z_3)=0 \tag{2}$$

と表される．ここで，f は荷重パラメータである．

局座標を用いて $z_i=r_i exp(\theta_i)$ と表すと，$(r_1,r_2,r_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ の組み合わせにより，分岐解の方向が表される．

斉木の理論計算[4)]によると，解の候補としては，**表–1** ようなものが挙げられる．この表にはこれら分岐解の候補とその対称性を記す．但し**図–1** に示す通り，p_1，p_2 はそれぞれ 0 °方向と 120 °方向の並進を，s，r はそれぞれ鏡映，回転を表す記号であり，$\left\langle \bullet \right\rangle$ は括弧内の生成元から成る群を表わす．

5. 分岐解析例

本研究で用いた解析モデルは**図–1** に示す 376 節点，384 要素からなるものである．これに周期境界条件を与え，4×4 セルをユニットセルとした，無限に連なっているハニカム構造の一部としての分岐挙動を解析することが出来るようにしている．周期境界条件は具体的には，対応する 2 節点の 3 自由度の変位 x_1 方向，x_2 方向，面内回転 θ の値が一致するというものである．

saiki 他のプログラム[5)]を用いて解析を行った結果，自明解の経路（主経路）上に 9 つの分岐点を発見した．この内，第 2 分岐点と第 5 分岐点の分岐解を求めることに成功した．第 2 分岐点で確認された分岐解の例を**図–2**(b)〜(h) に示す．

Keywords: ハニカム構造, 六重分岐点, 対称性, 群論的分岐理論
〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06,
東北大学大学院工学研究科 土木工学専攻数理システム設計学研究室
Phone: 022-795-7420; Fax: 022-795-7418

表–1 分岐解の候補の例とその対称性

モード	$(r_1, r_2, r_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ 群 $\langle$ 生成元 $\rangle$
並進対称モード A	$(0,0,1,0,0,0)$ $\langle p_1, p_2^2 r^3, s\rangle$
並進対称モード B	$(0,0,1,0,0,-\frac{\pi}{4})$ $\langle p_1 p_2^3 s, p_2 r^3\rangle$
2 軸対称モード A	$(1,1,0,0,0,0)$ $\langle s, p_1^2 r^3\rangle$
2 軸対称モード B	$(1,1,0,-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4},0)$ $\langle p_1 p_2^2 s, p_1^3 p_2^2 r^3\rangle$
120 °回転対称モード A	$(1,1,1,0,0,0)$ $\langle r^2, s\rangle$
120 °回転対称モード B	$(1,1,1,\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4},-\frac{\pi}{4})$ $\langle p_1^2 p_2^2 r^2\rangle$
60 °回転対称モード	$(1,1,1,0,\frac{\pi}{2},0)$ $\langle p_1^3 p_2^2 r\rangle$

a)　並進対称性を持つ分岐解

並進対称性を持つ分岐解で物理的に異なるものは 2 種類確認することが出来た．それらを，**図–2**(b)，**図–2**(c) に示す．**図–2**(b) に示すパターンは $\langle p_1, p_2^2 r^3, s\rangle$ という群で対称性が表される**表–1** の並進対称モード A に相当する分岐解であり，**図–2**(c) に示すパターンについては，$\langle p_1, p_2^2 r^3, s\rangle$ という群で対称性が表される**表–1** の並進対称モード B に相当する分岐解であることが分かる．

b)　2 軸対称性を持つ分岐解

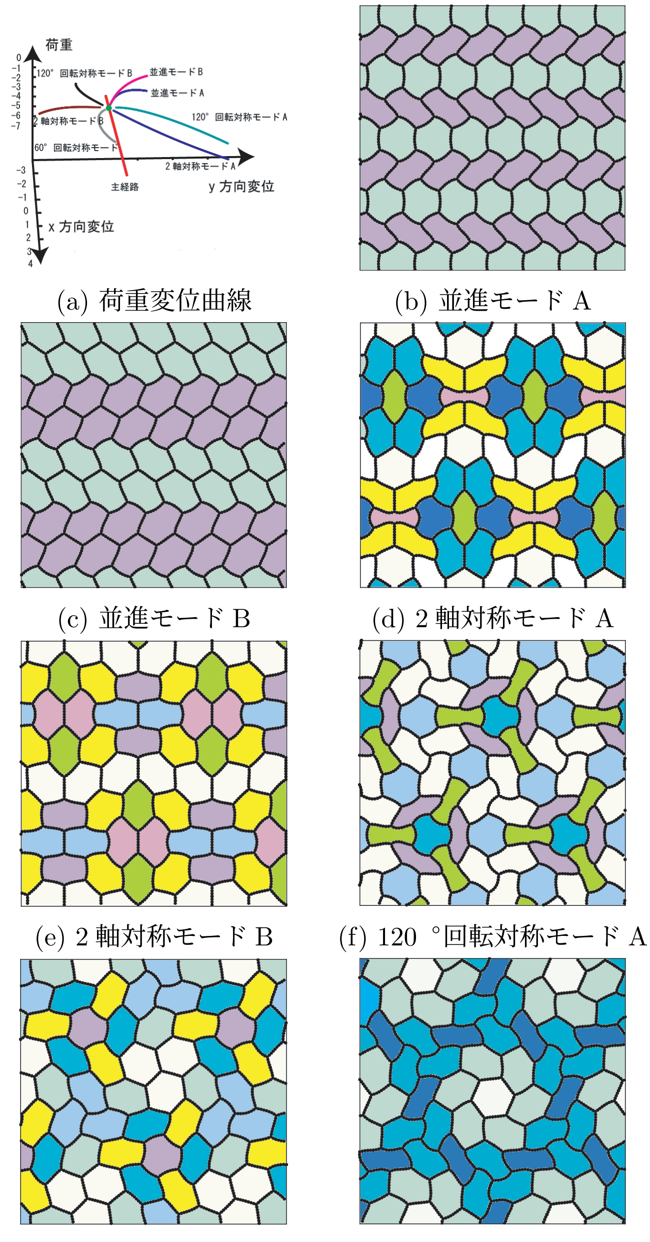
2 軸対称性を持つモードで物理的に異なるものは**図–2**(d)，**図–2**(e) に示す 2 種類を確認することが出来た．**図–2**(d) に示す分岐パターンは**表–1** の $\langle s, p_1^2 r^3\rangle$ で表される 2 軸対称モード A の分岐解であり，**図–2**(e) に示すパターンについては**表–1** の $\langle p_1 p_2^2 s, p_1^3 p_2^2 r^3\rangle$ で表される 2 軸対称モード B の分岐解であることが分かる．

c)　回転対称性を持つ分岐解

回転対称性を持つモードで物理的に異なるものは，**図–2**(f)，**図–2**(g)，**図–2**(h) の 3 種類を確認することができた．**図–2**(f) の分岐パターンには，120 °回転対称性と軸対称性があり，**表–1** の $\langle r^2, s\rangle$ という対称性のある 120 °回転対称モード A に相当する分岐解であることが分かる．また，**図–2**(g) の分岐パターンは 120 °回転対称性のみを有しており，**表–1** の $\langle p_1^2 p_2^2 r^2\rangle$ という群で表される 120 °回転対称モード B であると判断することが出来る．一方，**図–2**(h) の分岐パターンの対称性は 60 °回転対称性のみで，**表–1** の $\langle p_1^3 p_2^2 r\rangle$ で表わされる 60 °回転対称モードであると断定することが出来る．

6.　結論

本研究でハニカムの分岐解析に 4×4 セルモデルで，は等変位法[1]と群論的分岐理論[4]の知見を用いることにより，2×2 セルモデルでは発見することのできなかった波長の長い分岐のモードの解を効率良く発見することが出来た．今後は今回発見することのできなかった第 3 分岐点，第 6 分岐点の分岐解についても探索すること今後の課題である．



(a) 荷重変位曲線　(b) 並進モード A　(c) 並進モード B　(d) 2 軸対称モード A　(e) 2 軸対称モード B　(f) 120 °回転対称モード A　(g)120 °回転対称モード B　(h) 60 °回転対称

図–2　第 2 分岐点の変形パターン各種

参考文献

1) 成島 雄嗣：ハニカムの変形パターンの分岐シミュレーション, 東北大学卒業論文 , 2004.
2) 須藤 健太郎：修正剛性法を用いたハニカム構造の分岐解析, 東北大学卒業論文 , 2005.
3) Saiki, I., Ikeda, K., and Murota, K., Flower patterns appearing on a honeycomb structure and their bifurcation mechanism. *Int. J. Bif. Chaos*, 15(2), pp. 497–515, 2005.
4) 斉木功：6 重分岐に関する分岐理論, 予稿
5) Saiki, I., Ooue, K., Terada, K., and Nakajima, A., Multiscale Modeling for Planar Lattice Microstructures with Structural Elements *Int. J. Multiscale. Comput .Eng*, 4(4), pp. 429–443, 2006.