

Newton-Raphson 法による RC 部材の曲げ強度の解析

秋田大学 学生会員 ○今 伸司
秋田大学 フェロー 川上 洵
秋田大学 学生会員 奥山 佳史

1. まえがき

任意形の鉄筋コンクリート部材に軸力および 2 軸曲げが作用する場合は、立体構造物等の実構造物においてよくみられる荷重状態である。本研究では、荷重が小さく全断面を有効とする弾性理論を State I、そして、引張部を無視する RC 解析理論を State II、さらに、State II から終局にいたるコンクリートおよび鉄筋に対し非線形の応力 - ひずみ関係を仮定して弾塑性解析を行う場合を State III として、与えられた断面力に対する応力解析を行った。

なお、解析においては、基準点におけるひずみ ε_0 、 x 軸に関する曲率 ψ_x 、 y 軸に関する曲率 ψ_y を変数とし、Gauss の積分定理と Newton-Raphson 法を用いる。

2. 弾塑性解析(State III)

2.1 仮定

弾塑性解析においては次の①～③を仮定する。

①平面保持の法則が成り立つ。②コンクリートの引張応力を無視する。③コンクリートおよび鉄筋の応力 - ひずみ関係はそれぞれ図 - 1 と図 - 2 とする。

2.2 コンクリートおよび鉄筋の応力度

図 - 3 の断面において軸力 N および曲げモーメント M_x 、 M_y が作用するときの各材料の応力度は、応力 - ひずみ関係より次のように表される。

1) コンクリート

図 - 1 のように任意の曲線で与えられる応力 - ひずみ関係を多数の直線で近似することにより、コンクリートのある任意の区間 $i \sim i+1$ における応力は(1)式のように表すことができる。

$$\sigma_i = C_i \varepsilon + D_i \quad (\varepsilon_i \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{i+1}) \quad \cdots (1)$$

ここで、

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \psi_x y + \psi_y x$$

$$C_i = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}, D_i = \frac{\sigma_i \varepsilon_{i+1} - \sigma_{i+1} \varepsilon_i}{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}$$

である。

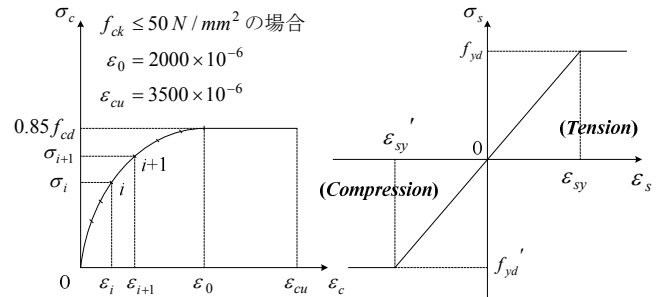


図 - 1 直線近似された
応力 - ひずみ曲線

図 - 2 鉄筋の
応力 - ひずみ関係

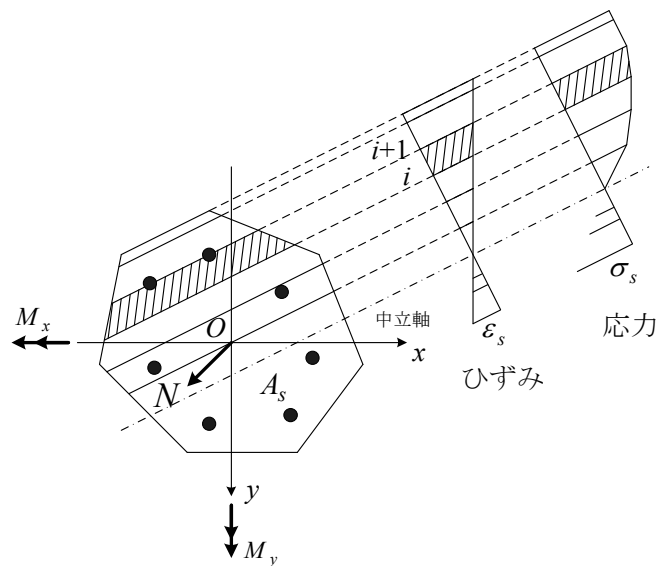


図 - 3 鉄筋コンクリート任意形断面

2) 鉄筋

任意点 (x_{si}, y_{si}) にある鉄筋の応力は、引張部については(2)式、圧縮部については(3)式のように表される。

引張部

$$\sigma_{si} = \begin{cases} E_s (\varepsilon_0 + \psi_x y_{si} + \psi_y x_{si}) & (0 \leq \varepsilon_s < \varepsilon_{sy}) \\ f_{yd} & (\varepsilon_{sy} \leq \varepsilon_s) \end{cases} \quad \cdots (2)$$

圧縮部

$$\sigma'_{si} = \begin{cases} E_s (\varepsilon_0 + \psi_x y_{si} + \psi_y x_{si}) & (\varepsilon'_{sy} < \varepsilon'_s \leq 0) \\ f'_{yd} & (\varepsilon'_s \leq \varepsilon'_{sy}) \end{cases} \quad \cdots (3)$$

2.3 釣合い式

式(1)、(2)、(3)から軸力および曲げモーメントの釣合い式は、(4)式ようになる。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_{in} = \begin{Bmatrix} \sum_i \int \sigma_c dA_c + \sum \sigma_{si} A_{si} \\ \sum_i \int \sigma_c y_c dA_c + \sum \sigma_{si} A_{si} y_{si} \\ \sum_i \int \sigma_c x_c dA_c + \sum \sigma_{si} A_{si} x_{si} \end{Bmatrix} \cdots (4)$$

ここで、 A は断面積を表し、サフィックス c, s はそれぞれコンクリート、鉄筋を表す。また、サフィックス i は図 - 3 の斜線部に対応する。

断面に作用する $\{N, M_x, M_y\}$ に対して、コンクリート圧縮部、鉄筋の軸力および曲げモーメントの合計の断面力 $\{N, M_x, M_y\}_{in}$ が釣り合う。釣合い式(4)を満足する $\{\varepsilon_0, \psi_x, \psi_y\}$ を求めるため、式(4)の両者の差を f, g, h と置き、 $\{\varepsilon_0, \psi_x, \psi_y\}$ の関数で表す。

$$\begin{Bmatrix} f(\varepsilon_0, \psi_x, \psi_y) \\ g(\varepsilon_0, \psi_x, \psi_y) \\ h(\varepsilon_0, \psi_x, \psi_y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}_{in} \cdots (5)$$

この f, g, h がゼロとなるよう Newton-Raphson 法を適用して繰り返し計算を行う。式(6)において f, g, h が所定の値以下に収束したとき $\{N, M_x, M_y\}$ が作用したときの $\{\varepsilon_0, \psi_x, \psi_y\}$ が得られる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial f}{\partial \psi_x} & \frac{\partial f}{\partial \psi_y} \\ \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial g}{\partial \psi_x} & \frac{\partial g}{\partial \psi_y} \\ \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial h}{\partial \psi_x} & \frac{\partial h}{\partial \psi_y} \end{bmatrix}_n \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix}_{n+1} - \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix}_n = - \begin{Bmatrix} f \\ g \\ h \end{Bmatrix}_n \cdots (6)$$

ここで、サフィックス n は Newton-Raphson 法における繰り返し計算回数に対応する。また、解析過程から、 E_c を用いて全断面有効と考え換算断面を求め、この断面に $\{N, M_x, M_y\}$ が作用するときの $\{\varepsilon_0, \psi_x, \psi_y\}$ を初期値 ($n=1$) とする。

3. 数値解析例

図 - 4 に示す円形断面に対し 2 軸曲げが作用したときにおける数値計算を行う。図 - 5 には合力曲げモーメント M_{xy} と圧縮縁のひずみの関係を示す。ここで、 M_{xy} は、 $M_{xy} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ である。また、鉄筋比

$p=1.6\%$ はコンクリートの圧縮縁のひずみが $0.85f_{cd}/E_c$ に達すると同時に引張鉄筋が降伏するような鉄筋比である。

$$r = 24 \text{ cm}, r_s = 18 \text{ cm}$$

$$E_c = 2.8 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$$

$$E_s = 2.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{ck} = 30 \text{ N/mm}^2$$

$$\gamma_c = 1.3$$

$$f_{yd} = 295 \text{ N/mm}^2$$

$$A_s = 28.956 \text{ cm}^2 (p=1.60\%)$$

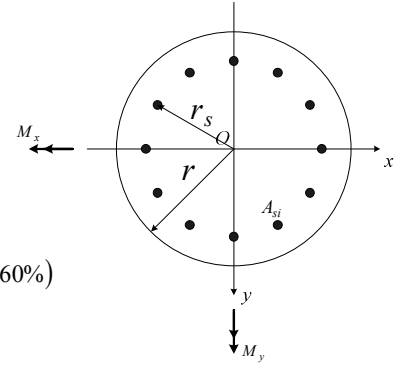


図 - 4 円形断面

図 - 5 に示す ε_1 は、コンクリートの引張縁のひずみが 200μ に達したときの圧縮縁のひずみであり、 ε_2 は圧縮縁のひずみが $0.85f_{cd}/E_c$ または引張鉄筋が降伏ひずみ ε_{sy} に達したときの圧縮縁のひずみである。また、State I の理論の適用範囲は圧縮縁のひずみ $\varepsilon_{ccom} \leq \varepsilon_1$ の場合、State II の理論の適用範囲は圧縮縁のひずみが $\varepsilon_1 < \varepsilon_{ccom} \leq 0.85f_{cd}/E_c$ かつ引張鉄筋のひずみ $\varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy}$ の場合である。

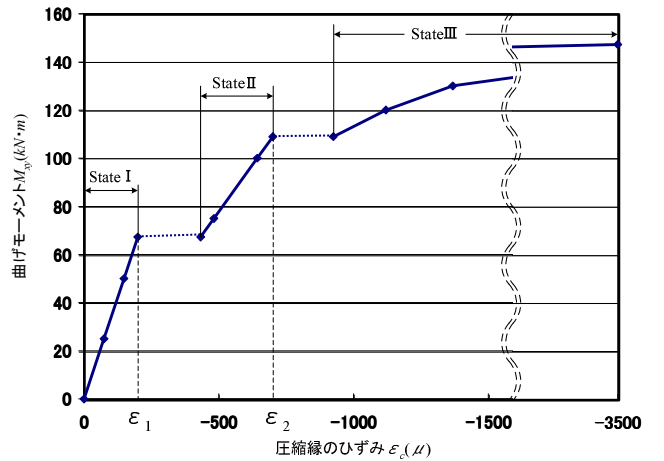


図 - 5 曲げモーメントと圧縮縁のひずみとの関係

4. むすび

本研究では、任意形断面の鉄筋コンクリート部材の弾性から弾塑性を含み終局にいたるまでの挙動を解析した。また、これらの理論に基づく電算プログラムを作成した。