

斜面上に形成される水路の分岐機構について

東北大学大学院 学生会員 ○水嶋大樹
北海道大学大学院 正会員 泉 典洋

1. はじめに

降雨は流れとなり斜面を流下する．このとき流れは低いところに集中し，局所的に地表の侵食が著しくなる．侵食により低くなったところにはさらに多くの流れが集まり，やがて地表に一筋の溝（ガリ）が形成される．このガリは発達過程の中で，頭部が上流に向かって複数に分岐することがある．このような侵食と分岐を繰り返すことによって複雑な幾何形状の水路網が形成される¹⁾．ガリは発達に伴って多くの土砂を生産するため，流域全体の土砂収支を把握する上でガリの発達機構を知ることは重要である．そこで本研究では，ガリの頭部を円形の開口部でモデル化し，円周方向に擾乱を与えて線型安定解析を行うことによりガリの分岐過程を理論的に明らかにする．

2. モデル

ガリの頭部には放射状に流れが集まる．そこで頭部を円形の開口部でモデル化し，円周方向にサイン型擾乱を与える．図-1に開口部および開口部を与えた擾乱の概念図を示す．実線は開口部，破線は微小擾乱を表している．実線の外側にある破線部分が後にガリとなると考えられ，波数と分岐の数が対応している．ただし，実際のガリ頭部は半円形であるため，この擾乱の波数の半分の数が実際に発生する分岐の数と考えられる．図-1(a)のときは $k = 2$ であり，半円の領域で考えると分岐の数は1となるので，ガリ頭部が不安定になったとしても分岐は発生しないことが分かる．図-1(b)のときは $k = 3$ であり，分岐の数は1-2となるので，頭部は上流に向かって複数に分岐すると考えられる．したがってガリ頭部が不安定になり，かつ微小擾乱の波数が3を越えるようなときに頭部は複数に分岐することが分かる．

3. 定式化

(1) 無次元化

次のような無次元化を導入する．

$$\tilde{r} = \tilde{R}_c r, \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{U}_c (u, v) \quad (1a, b)$$

$$(\tilde{h}, \tilde{\eta}) = \tilde{H}_c (h, \eta), \quad \tilde{t} = \frac{\tilde{H}_c}{\tilde{E}_c} t \quad (1c, d)$$

ここで $\tilde{R}_c$ はフルード限界点の $\tilde{r}$ 座標， $\tilde{U}_c$ および $\tilde{H}_c$ は限界流速および限界水深である．また $\tilde{E}_c$ はフルード限界点における侵食速度である．

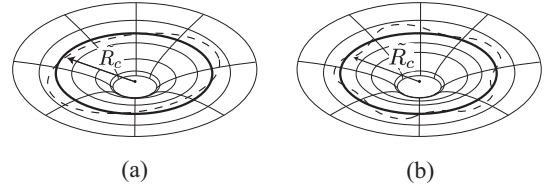


図-1 ガリ頭部を与える擾乱の概念図．(a) $k = 2$, (b) $k = 3$.

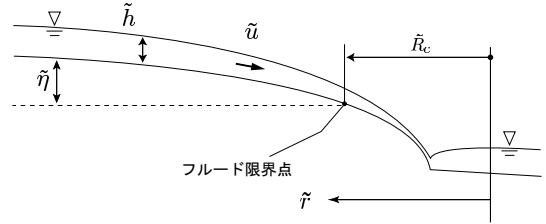


図-2 ガリ頭部付近の流れの概念図．

(2) 支配方程式

図-2のようなガリ頭部付近の流れを表すために次のような極座標系で表した無次元化された浅水方程式を導入する．

$$u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v}{r+1} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r+1} + \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{\partial \eta}{\partial r} - \epsilon^{-1} \frac{(u^2 + v^2)^{1/2} u}{h} = 0 \quad (2)$$

$$-u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r+1} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{uv}{r+1} + \frac{1}{r+1} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{1}{r+1} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \epsilon^{-1} \frac{(u^2 + v^2)^{1/2} v}{h} = 0 \quad (3)$$

$$-\frac{1}{r+1} \frac{\partial(r+1)uh}{\partial r} + \frac{1}{r+1} \frac{\partial v h}{\partial \theta} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + E = 0 \quad (5)$$

$$E = \begin{cases} (u^2 + v^2 - \psi)^\gamma, & u^2 + v^2 \geq \psi \\ 0 & u^2 + v^2 < \psi \end{cases} \quad (6)$$

ここで r および θ は半径方向および円周方向の座標， u および v は流速の $-r$ および θ 方向成分， h および η は水深および底面高さである．また ψ および γ は無次元化された限界剪断力と土壌特性を表す無次元パラメータである．上式のパラメータ ϵ は次式で表される．

$$\epsilon = \frac{\tilde{H}_c / C_f}{\tilde{R}_c} \quad (7)$$

ここで C_f は底面摩擦係数である．式(2)–(6)の v をゼロとすることで円周方向に一樣な一次元基本状態の支配方程式が導かれ，それらを整理すると次式が得られる．

$$\frac{du}{dr} = \frac{u^5(r+1)^3 + \epsilon u - \epsilon \eta' u^2(r+1)^2}{\epsilon [u^3(r+1)^2 - (r+1)]} \quad (8)$$

このとき η' は斜面形状の一階微分であり、斜面形状は上流側無限遠点 ($r \rightarrow \infty$) において一定勾配 σ に漸近するような次式で表される。

$$\eta = \sigma r - \frac{1}{\phi} [e^{-\phi(\epsilon^{-1}+1-\sigma)r} - 1] \quad (9)$$

ここで ϕ は斜面形状の曲率を表すパラメータである。式 (9) および $u(0) = 1$ を用いることによって式 (8) を数值的に解き、流れの基本解を求めることができる。

4. 線型安定解析

基準状態の斜面に対して円周方向振幅 a の微小な擾乱を与える。このとき u および v , h , η はそれぞれ次のように摂動展開される。

$$u = u_0 + au_1 e^{\Omega t} \cos k\theta \quad (10a)$$

$$v = av_1 e^{\Omega t} \sin k\theta \quad (10b)$$

$$h = h_0 + ah_1 e^{\Omega t} \cos k\theta \quad (10c)$$

$$\eta = \eta_0 + a\eta_1 e^{\Omega t} \cos k\theta \quad (10d)$$

Ω および k は擾乱の発達率および波数を表している。発達率 Ω が正の値のとき擾乱は時間とともに増幅し、ガリ頭部は不安定になる。逆に負の値のとき擾乱は時間とともに減衰し、頭部は安定する。

式 (2)–(5) に式 (10) を代入し $O(a)$ について整理することで摂動方程式が導かれる。

上流側無限遠点では流れは静止し、擾乱は消滅する。したがって次の境界条件が導かれる。

$$u_1 = v_1 = h_1 = \eta_1 = 0 \quad \text{as} \quad r \rightarrow \infty \quad (11)$$

また摂動方程式はフルード限界点において特異性を有するため、次のような正則条件が要請される。

$$\begin{aligned} [2 - 2\epsilon u'_0 - f^{-1}\epsilon E_u(1)] u_1 - k\epsilon v_1 \\ + [\epsilon(1 + u'_0) - 1] h_1 - \Omega f^{-1}\epsilon \eta_1 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

摂動方程式および流れの基本解、境界条件、正則条件を用いることによって一般化固有値問題が導かれる。そして Chebyshev 多項式展開によるスペクトルコロケーション法を用いて解くことで発達率 Ω を得ることができる。

5. 結果

図-3 は擾乱の発達率 Ω を波数 k および ϵ の関数として示したものである。発達率 Ω が最大のときの波数を卓越波数といい、卓越波数がモデルに発生する波数となる。例えば図-3 の $\epsilon = 0.1$ の場合は卓越波数は 3 程度であり、分岐の数は二つとなる。 ϵ が大きいときは卓越波数は小さく、 ϵ が小さくなると卓越波数は大きくなる。図-3 を見ると

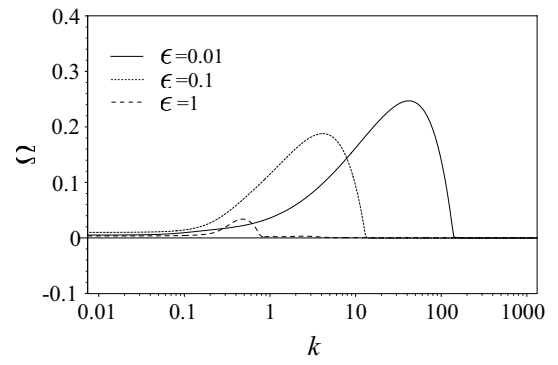


図-3 k および ϵ による発達率 Ω の変化. $\phi = 2$, $\sigma = 0.1$, $\psi = 0.1$, $\gamma = 1.5$

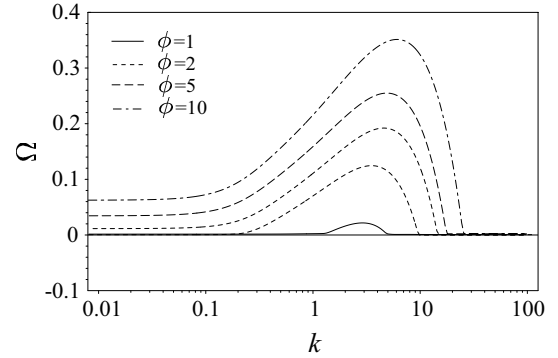


図-4 k および ϕ による発達率 Ω の変化. $\epsilon = 0.1$, $\sigma = 0.1$, $\psi = 0.1$, $\gamma = 1.5$

ϵ が 0.1 よりも小さくなると波数が 3 以上となり、分岐が発生することが分かる。斜面の底面摩擦係数 C_f を 0.01 程度と仮定すると、限界水深が頭部半径の 1/1000-1/200 程度より小さいときにガリが複数に分岐することになる。

図-4 に斜面形状のパラメータ曲率 ϕ と波数 k による発達率 Ω の変化を示す。これを見ると ϕ が増加すると発達率 Ω が増加するが、卓越波数 k はそれほど変わらないことが分かる。このことから斜面形状は分岐の数にはそれほど影響を与えず、限界水深によって分岐の数が決定されることが分かる。

6. まとめ

本研究ではガリ頭部を円形の開口部でモデル化し、円周方向に微小な擾乱を与えることで線型安定解析を行った。その結果、ガリの方岐は限界水深によって決定されており、限界水深が頭部半径の 1/200-1/1000 より小さいときに分岐が発生することが分かった。また斜面形状は分岐の発達速度に影響を与えるものの、分岐の数にはそれほど影響しないことが明らかになった。

参考文献

- 1) 小嶋 尚, 野上道男, 小野有五, 平川一臣: 日本の地形 2 北海道, 東京大学出版会, 2003.