

Semi-Lagrange 型有限要素法による流体解析手法の開発

八戸高専 学生会員 ○小保内 啓太
八戸高専 正会員 丸岡 晃
富山大学 正会員 奥村 弘

1. 要 旨

近年、数値流体解析において、移流項を高精度に計算するための Cubic Interpolated Propagation / Constrained Interpolation Profile (CIP) 法¹⁾を初めとする Multi Moment Scheme が提案され、多分野に拡張されている。CIP 法とは、物理量とその空間微分係数などを従属変数とし、物理量プロファイルを 3 次 Hermite 補間によって近似する Semi-Lagrange Scheme である。

本研究では、高精度かつ高効率となる非構造格子による流体解析手法を開発するために、Semi-Lagrange 法で必要となる物理量の高次補間を、有限要素法における要素内の内挿補間としてとらえ、構造解析分野における板曲げ問題で考案された高次補間要素を Semi-Lagrange 法による移流計算に適用する。さらに、非移流計算でも、同様の要素を適用し、有限要素法において一般的な Galerkin 法によって離散化する。この手法は、Semi-Lagrange 法と Galerkin 法を組み合わせた手法であることから、Semi-Lagrange Galerkin (SLG) 法と呼ぶことにする。

2. 移流拡散方程式

境界 Γ を有する領域 Ω において、スカラー関数 $u(\mathbf{x}, t)$ に関する移流拡散方程式を考える。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u - \nu \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \Gamma \\ u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (a_x, a_y)$ は時間に依存しない移流速度、 ν は拡散係数 ($\nu \geq 0$) である。記述を簡単にするため、移流速度は、領域内で $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ を満足するものとする。

3. 特性法

時刻 $n+1$ に位置 $\mathbf{x}$ にある仮想流体粒子の軌跡は、図-1 に示す特性曲線として考えることができ、上流点 $\mathbf{X}^n$ は特性曲線上にある。

特性法では、時間増分を Δt として、移流項を次式のよう

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u \approx \frac{u^{n+1}(\mathbf{x}) - u \circ \mathbf{X}^n(\mathbf{x})}{\Delta t} \quad (2)$$

ここで、 $u^{n+1}(\mathbf{x})$ は時刻 $n+1$ でのスカラー関数、また、 $u \circ \mathbf{X}^n(\mathbf{x})$ は時刻 n での位置 $\mathbf{x}$ を起点とした特性曲線上の上流点 $\mathbf{X}^n(\mathbf{x})$ におけるスカラー関数であり、合成関数

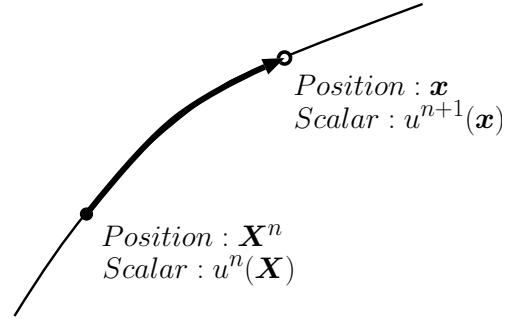


図-1 Characteristic Curve

として表される。本研究では、1 次精度の Euler 法、または、2 次精度の予測子・修正子法を適用し、上流点の $\mathbf{X}^n$ を求める。

4. Semi-Lagrange Galerkin (SLG) 法

SLG 法では、移流計算と非移流計算を分離する Semi-Lagrange 法を適用する。特性法による移流項の近似式 (2) の右辺を 0 とし、さらに移流計算による解の更新を $\tilde{u}$ とすると、移流計算は以下のように行われる。

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = u \circ \mathbf{X}^n(\mathbf{x}) \quad (3)$$

非移流計算では、時間方向の離散化に次式のような Crank-Nicolson 法による近似を行う。

$$\frac{u^{n+1} - \tilde{u}}{\Delta t} - \nu \Delta \frac{\tilde{u} + u^{n+1}}{2} = 0 \quad (4)$$

式 (4) の空間方向の離散化には Galerkin 法を適用する。

移流計算を精度よく行うためには、CIP 法の考えに従い、物理量の分布を高次補間関数によって近似する必要がある。本研究では、この高次補間に有限要素法による構造解析分野の板曲げ問題において考案された 1 階導関数値を自由度に含む完全 3 次三角形要素を適用する。さらに非移流計算においても、移流計算と同様の要素を適用し、Galerkin 法によって離散化する。この方法によれば、要素の自由度に 1 階導関数値が含まれるため、一般的な CIP 法と組み合わせた非移流計算法のように、支配方程式を 1 階微分した 1 階導関数値に関する時間発展方程式を導出する必要がなくなる。また、移流・非移流計算とも同様の物理量の補間が行われ、精度が損なわれないと考えられる。

計算効率の面では、連立 1 次方程式を解くのは非移流計算のみであり、さらに対称となる点において優れている。また、移流計算では、上流点が起点と離れていてもその位置

を精度よく計算し、上流点の属する要素が正しく検索できれば、補間によって解の更新が可能である。よって、CFL条件に制約されない大きな時間増分を選ぶことができ、安定性の面でも優れている。

5. 完全3次三角形要素

本研究では、計算領域を三角形領域 K に分割し、スカラー関数 u の補間には、図-2に示すような三角形要素の頂点での関数値 u_i とその1階導関数値 $(\frac{\partial u}{\partial x}|_i, \frac{\partial u}{\partial y}|_i)$ 、さらに要素の重心での関数値 u_e を自由度とする10自由度の三角形要素を用いる。この要素は、完全3次補間となり、面積座標によって補間関数を陽的表示できる²⁾。

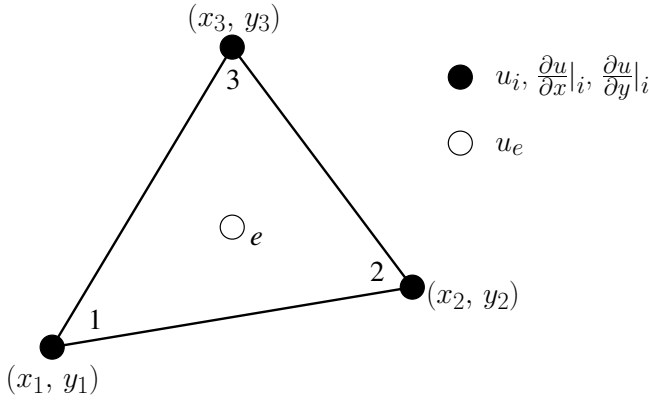


図-2 Complete cubic interpolated triangular element

三角形領域 K における完全3次三角形要素による有限要素近似 $u_h|_K$ は、以下のように表される。

$$u_h|_K = \sum_{i=1}^3 \left(H_{0i} u_i + H_{xi} \frac{\partial u}{\partial x}|_i + H_{yi} \frac{\partial u}{\partial y}|_i \right) + H_{0e} u_e \quad (5)$$

ここで、 H_{0i} , H_{xi} , H_{yi} は補間関数であり、面積座標 (L_1, L_2, L_3) の関数によって次式のように表される。

$$\begin{cases} H_{0i} = L_i^2 (3 - 2L_i) - 7L_1L_2L_3 \\ H_{xi} = L_i^2 (x_{ji}L_j - x_{ik}L_k) - (x_{ji} - x_{ik})L_1L_2L_3 \\ H_{yi} = L_i^2 (y_{ji}L_j - y_{ik}L_k) - (y_{ji} - y_{ik})L_1L_2L_3 \\ H_{0e} = 27L_1L_2L_3 \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 (i, j, k) は $(1, 2, 3)$ の偶置換であり、 $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$ である。

6. 数値実験

正方形領域 $\Omega = (0, 2) \times (0, 2)$ において、周期境界とする。移流速度 $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ 、拡散係数 ν をそれぞれ一定としたスカラー量 u に関する移流拡散問題を考える。初期条件を $u(x, y, 0) = \sin \pi(x + y)$ とするとき、解析解は $u(x, y, t) = e^{-2\nu\pi^2 t} \sin \pi(x + y - (a_x + a_y)t)$ となる。

計算メッシュは、規則的に分割した Mesh(a) と Delaunay 分割した Mesh(b) を用いる。なお、Mesh(b) では辺上の分割

幅を Mesh(a) と同じ分割幅 h に拘束し、同程度の要素数になるように分割している。計算条件は、移流速度 $a_x = a_y = 1$ 、拡散係数 $\nu = 0.04$, CFL 数 0.1 とする。時刻 $t = 1.0$ まで計算し、その時刻での計算誤差を評価する。比較対象として、三角形1次要素による SUPG 法の誤差評価も行った。

SLG 法は、Mesh(a), (b) とともに3次精度以上である。SUPG 法と比較しても精度の差は大きく、収束精度も SUPG 法の約2倍となっている。

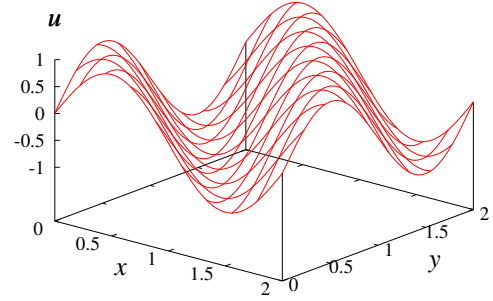


図-3 Initial condition ($u(x, y, 0) = \sin \pi(x + y)$)

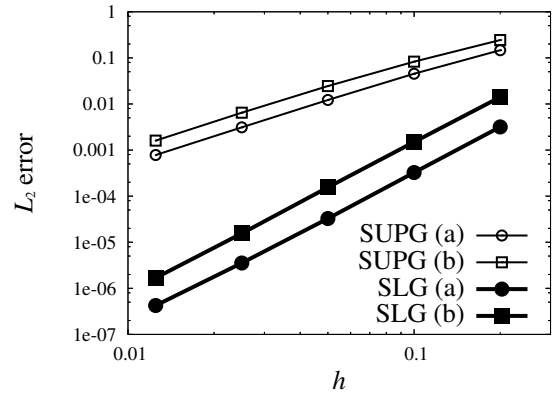


図-4 L_2 errors of advection diffusion problem

7. 結論

本研究では、2次元移流拡散方程式に対して、完全3次三角形要素を用いる SLG 法を開発し、計算精度の検討を行った。その結果、非構造格子においても3次以上の精度を持つことが確認され、三角形1次要素による SUPG 法や CIVA 法と比較して、高精度であることが示された。

Multi Moment Scheme は既に他分野に拡張されていることから、SLG 法もまた、様々な問題に適用できると考えられる。今後、自由水面を有する問題や、流れの方程式などに拡張する予定である。

参考文献

- 1) 矢部 孝 他編: CIP 法 - 原子から宇宙までを解くマルチスケール解法-, 森北出版 (2003) など
- 2) K.H.Huebner 著, 山田 嘉昭 訳: 有限要素法, 科学技術出版社 (1978)