ダムブレイク問題における格子ボルツマン法の適用性に関する一考察

東北大学大学院　学生員　○大家　隆行
東北大学大学院　正　員　　越村　俊一
東北大学大学院　正　員　　今村　文彦

1.　はじめに

従来，津波の数値計算には，浅水理論の差分法が広く用いられてきたが，この手法は簡便かつ実用的であり，またその誤差特性が良く知られている一方で，構造物への波力の評価や，漂流物の運搬，混相流への適用等，高次の物理現象やいわゆるマルチフィジックス現象の再現性には限界がある．そこで，本研究では以上の問題を克服する為の糸口として，近年研究が盛んな粒子法の一種である格子ボルツマン法[1]（Lattice Boltzmann Method，以下 LBM）を用いる．LBM は，統計力学に基づく数値流体シミュレーションであり，連続体である流体を微視的な粒子の集合体として仮定して，粒子の衝突・並進過程を通して巨視的視点での流動現象を再現する手法である．本論文では，まず，基礎的な問題であるダムブレイク問題に LBM を適用し，従来の差分法による解析解との比較を通じてその有用性を検討する．

2.　格子ボルツマン法

(1)　格子ボルツマン法の概要

LBM は粒子法の一種であり，格子気体法（熱力学を扱う手法）から発展された手法である．従来の巨視的な視点での離散的な連続式を支配方程式とする計算手法とは異なり，微視的視点における粒子の運動を計算する手法で，流体を流体内に仮想的に配した格子上で衝突と並進（移動）とを繰り返す多数の粒子の集合体と捉え，粒子分布関数を用いて質量・運動量保存則を満たすように，水深や流速等の巨視的変数を求める．LBM の特徴として，1.必要な未知数が粒子分布関数のみであり，陽的な計算手法であるため，有限差分法及び有限要素法と比較して，計算効率が高い，2.複雑な境界を持つ流れの解析に有利である，ことが挙げられ，現在，多孔物質内の流れや混相流などの流れの再現に成功している．

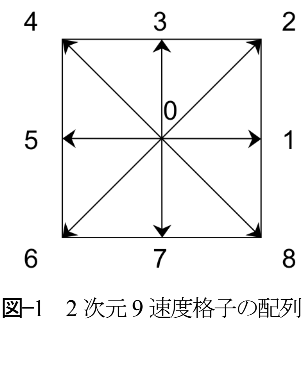

図-1　2 次元 9 速度格子の配列

(2)　2 次元 9 速度モデル

浅水理論では，格子パターンに図-1 に示す 2 次元 9 速度モデルを用いる[2]．ここで，e_αはα方向の並進速度ベクトル，f_αは粒子分布関数であり，e_αを持つ粒子の総数を表す．速度ベクトル e_αは次のように表される．

$$e_\alpha = \begin{cases} (0,0) & \alpha = 0 \\ e \times \left[\cos\dfrac{(\alpha-1)\pi}{4}, sin\dfrac{(\alpha-1)\pi}{4} \right] & \alpha = 1,3,5,7 \\ \sqrt{2}e \times \left[\cos\dfrac{(\alpha-1)\pi}{4}, sin\dfrac{(\alpha-1)\pi}{4} \right] & \alpha = 2,4,6,8 \end{cases} \tag{1}$$

(3)　格子ボルツマン方程式

浅水理論における格子ボルツマン方程式は，衝突演算項に格子 BGK モデル[3]を用いて，以下のように表される．

$$\begin{aligned} & f_\alpha\left(x + e_\alpha \Delta t, t + \Delta t\right) - f_\alpha\left(x,t\right) \\ & = -\frac{1}{\tau}\left[f_\alpha\left(x,t\right) - f_\alpha^{eq}\left(x,t\right) \right] + \frac{\Delta t}{6e^2} e_{\alpha i} F_i \end{aligned} \tag{2}$$

上式において，f_α^{eq}は局所平衡分布関数，τは単位時間緩和係数で，渦動粘性係数ν_eを用いて，$\tau = \dfrac{3\nu_e}{e^2\Delta t} + \dfrac{1}{2}$で表される．また，$e=\Delta x/\Delta t$である．また，左辺は粒子の並進過程，右辺第一項は粒子の衝突過程，第二項は外力項を表し，以上の支配方程式から陽的に未知数 f_αを求め，巨視的変数である水深，流速を求める．

(4)　局所平衡分布関数

局所平衡分布関数とは格子点上において流体が平衡状態に達したときの粒子分布であり，浅水理論における局所平衡分布関数は，

$$f_\alpha^{eq} = \begin{cases} h - \dfrac{5gh^2}{6e^2} - \dfrac{2h^2}{3e^2} u_i u_i & \alpha = 0 \\ \dfrac{gh^2}{6e^2} + \dfrac{h}{3e^2} e_\alpha u_i + \dfrac{h}{2e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \dfrac{h}{6e^4} u_i u_i & \alpha = 1,3,5,7 \\ \dfrac{gh^2}{24e^2} + \dfrac{h}{12e^2} e_\alpha u_i + \dfrac{h}{8e^4} e_{\alpha i} e_{\alpha j} u_i u_j - \dfrac{h}{24e^4} u_i u_i & \alpha = 2,4,6,8 \end{cases} \tag{3}$$

で表される．ここで，h は全水深，u は流速，g は重力加速

度である．

(5)　巨視的変数の導出

巨視的変数である全水深・速度は粒子分布関数 f_α から粗視化を行い，次のように決定される．

$$
h = \sum_\alpha f_\alpha \qquad
u = \sum_\alpha e_\alpha f_\alpha \Big/ \sum_\alpha f_\alpha = \frac{1}{h}\sum_\alpha e_\alpha f_\alpha \tag{4}
$$

3.　断面 2 次元ダムブレイク問題の数値解析

(1)　空間解像度と計算精度

数値解析例として，ダム破壊時の水流挙動解析を取り上げ，空間解像度が計算精度に及ぼす影響を考察する．**図-2** に解析モデル及び初期水位を示す．計算条件は，dx=0.1m，0.05m，0.01m の 3 ケースで行い，全ての場合において，e=10.0 とする．また，単位時間緩和係数を石川ら[4),5)]に従って 1.4（渦動粘性係数 ν_e=0.03m²/s）とし，壁面の境界条件には，底面に Bounce-back 条件（non-slip 条件）を，紙面に対して左右の壁には Mirror 条件（slip 条件）を用いた．なお，本計算では自由表面での剪断応力は考慮しないこととしている．**図-3** に LBM と，従来の浅水理論の差分法（SWE，解像度 dx=0.01m，e=10.0）による 1.0 秒後の水位変動を示す．図より，解像度が高くなるに従って，LBM の解が差分法の解析解に漸近していることが分かる．

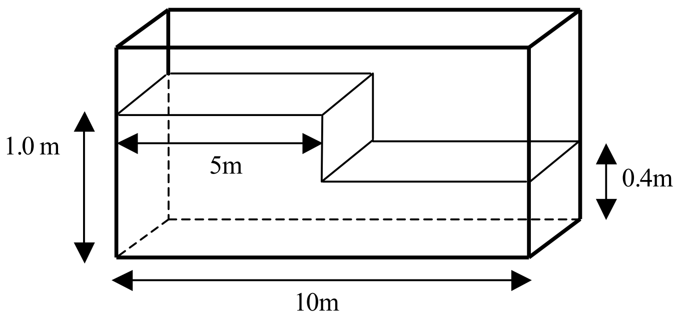

図-2　ダムブレイク解析モデル

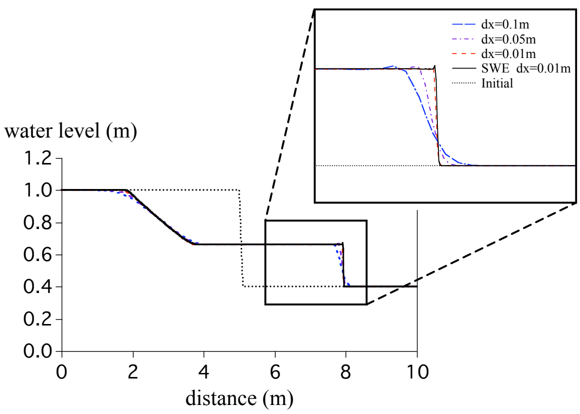

図-3　空間解像度の違いによる水位変動計算結果（t=1.0s）

(2)　単位時間緩和係数の影響

次に，単位時間緩和係数 τ が計算精度に及ぼす影響を検討する．空間解像度を dx=0.01m，e=10.0 とし，単位時間緩和係数 τ=1.4，3.5，9.5 の 3 ケースで計算を行った結果，t=1.0s において，**図-4** のような結果が得られた．図から，τ が小さくなるに従い，LBM 解が差分法による解に漸近していることが分かる．また，**図-3** と比較して，τ の差異による LBM 解の変動は，解像度の差異による変動と同程度のオーダーであることから，今後は空間解像度と同様に，解析対象とする現象に対して最適となる単位時間緩和係数の取り方を検討する必要がある．

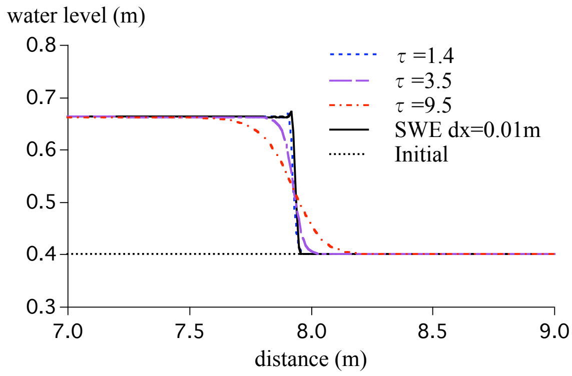

図-4　単位時間緩和係数の違いによる水位変動計算結果（t=1.0s）

4.　結論及び今後の課題

本研究では，LBM をダムブレイク問題に適用し，浅水理論に対する適用性を検討した．LBM は流体力学分野において様々な研究がなされているが，津波計算に適用された例は非常に少ない．適用への課題として

・空間解像度及び単位時間緩和係数と計算精度の関係
・斜面上の遡上と底面での抵抗則
・砕波等の自由表面を有する非線形問題への適用性

等が挙げられるため，今後は以上の問題について検討を行っていく．

参考文献

1) S. Chen ,G. D. Doolen(1998) : Lattice Boltzjann Method for fluid flows, Annu.Rev.Fluid Mech,1998 Vol.30 ,pp.329-364.

2) J. G. Zhou (2003) : Lattice Boltzmann Mehod for Sharrow Water Flows,　Springer , 2003

3) Y.H.QIAN (1992) : Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation, Europhysics letters ,1992

4) 石川裕士・立石絢也・田中聖三・樫山和男(2004) : 格子ボルツマン法による浅水長波流れ解析，第 18 回数値流体力学シンポジウム，D4-4.

5) 石川裕士・立石絢也・樫山和男(2006) : 非構造格子に基づく CIVA-格子ボルツマン法による浅水長波流れ解析，応用力学論文集，vol.9，pp.231-238