

浸透層上における流れの安定性に関する研究

東北大学大学院 学生員 ○大友 裕隆
北海道大学大学院 正会員 泉 典洋

1. はじめに

急勾配斜面上の浅い流れには転波列と呼ばれる波列が形成されることが知られている．この転波列については流体力学の分野において古くから研究されており，発生初期における線形安定性や十分発達した準定常状態に関する研究などが数多くなされている¹⁾．一方，礫床河川等の流れのように，底面が透水性の高い浸透層で構成されているような場合，流速の大きい河川流と流速の小さい浸透流の間に不安定が発生することが予想される．同時に，フルード数が比較的大きい場合，河川流自体も不安定となり，水面には転波列が発生する．このような水面における不安定現象と河川流・浸透流間における不安定現象は相互に影響を及ぼし合うことが予想されるが，これについて取り扱った例は，著者らの知る限り存在しない．そこで本研究では，河川流および浸透流の流れを定式化し線形安定解析を行うことで，河川流-浸透流間の不安定現象を明らかにすることを目的とする．

2. 定式化

2. 1 概念的モデル

図-1に示すような一様勾配斜面の二層流モデルを考える． $\tilde{x}$ は流下方向の座標， $\tilde{y}$ は河床を原点とし上向きにとった水深方向の座標である．流量は流下方向に一定とし，浸透層厚 $\tilde{h}$ は水深 $\tilde{H}$ とほぼ同程度から10倍程度のオーダーの厚さを有するものと仮定する．等流状態にある河川流および浸透流に対し微小な擾乱を与え，その擾乱が発達するか減衰するかを線形安定解析を用いて調べることとする．

2. 2 支配方程式

図-1に示した河川層の流れは，レイノルズ平均を取った二次元のNavier-Stokes方程式を用いて，次のように表される．

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + 1 + \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{1}{S} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここで t は時間， U および V はそれぞれ x および y 方向の流速成分， P は圧力， S は河床勾配である．上式には

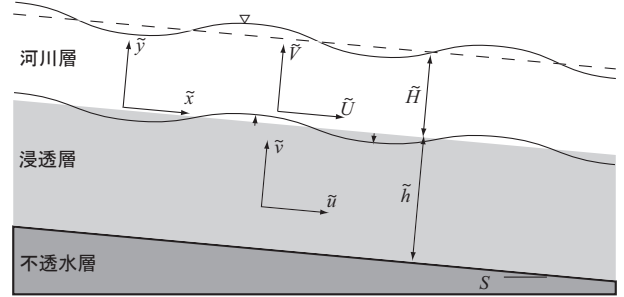


図-1 概念的モデル．

次のような無次元化を導入している．

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{H}_n (x, y), \quad (\tilde{U}, \tilde{V}) = U_f (U, V) \quad (4a, b)$$

$$(\tilde{P}, \tilde{T}_{ij}) = \rho \tilde{U}_f^2 (P, T_{ij}), \quad \tilde{t} = \frac{\tilde{H}_n}{\tilde{U}_f} t \quad (4c, d)$$

ここで $\tilde{U}_f (= (g \tilde{H} S)^{1/2})$ および $\tilde{H}_n$ はそれぞれ等流状態における河川流の摩擦速度および水深， ρ は水の密度， g は重力加速度である．さらに $T_{ij} (i, j = x, y)$ はレイノルズ応力テンソルであり，次のように表される．

$$T_{xx} = 2\nu_T \frac{\partial U}{\partial x}, \quad T_{yy} = 2\nu_T \frac{\partial V}{\partial y}, \quad T_{xy} = \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (5a-c)$$

$$\nu_T = l^2 \frac{\partial U}{\partial y}, \quad l = \kappa (y + R) \left(\frac{H - y}{H} \right)^{1/2} \quad (5d, e)$$

ここで ν_T および l ， κ ， R は渦動粘性係数および混合距離，カルマン定数，基準高さである．

また浸透層の流れは次のように表される²⁾．

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\lambda^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 1 + \frac{\gamma}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{u}{\phi S^{1/2}} \quad (6)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\lambda^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{S} + \frac{\gamma}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{v}{\phi S^{1/2}} \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

ここで u および v は浸透層内における見かけの流速のそれぞれ x 方向および y 方向成分， p は浸透層内の圧力， λ は空隙率である． γ および ϕ はそれぞれ浸透層内の渦動粘性係数および透水係数に関する無次元パラメータであり，次のように表される．

$$\gamma = \frac{\epsilon_s \tilde{B}}{\tilde{H}_n}, \quad \phi = \frac{\tilde{k}_p}{(g \tilde{H}_n)^{1/2}} \quad (9a, b)$$

ここで ϵ_s は浸透層内の無次元渦動粘性係数, $\tilde{k}_p$ は透水係数である.

2. 3 境界条件

水面では, 水面に対して法線方向および接線方向の応力がどちらもゼロ, また運動学的境界条件が成立する. また浸透層上では, 接線方向のせん断力および流速, 浸透層内外を通過する流量, 圧力が連続となる. さらに浸透層底面では, 水深方向流速およびせん断力がゼロとなり, 計 9 つの境界条件を用いる.

3. 線形安定解析

次のような摂動展開を導入する.

$$(U, V, u, v, P, p, H) = (U_0, 0, u_0, 0, P_0, p_0, 1) + A(U_1, V_1, u_1, v_1, P_1, p_1, H_1)e^{i(kx - \omega t)} \quad (10)$$

ここで A は擾乱の振幅であり, 微小と仮定する. k および ω は擾乱の波数および角周波数であり, 式 (10) を支配方程式 (1)–(3) および (6)–(8) に代入して A のオーダーで整理すると, $O(1)$ において基本状態の解が得られ, $O(A)$ においては摂動方程式が導かれる.

摂動方程式を解く際には Chebyshev 多項式展開を導入し, ω を固有値とする一般化固有値問題を構成する. ここで ω の虚部が擾乱の発達率 Ω となり, 次のように表される.

$$\Omega = \Omega(k; S, \gamma, \phi, h, \lambda, R) \quad (11)$$

4. 結果および考察

擾乱の発達率 Ω をフルード数 Fr および無次元波数 k の等高線図により示す. 図は縦軸をフルード数 Fr (S), 横軸を無次元波数 k に取ってある. また太い実線が $\Omega = 0$ の中立曲線, 細い実線が正のコンタ, 点線が負のコンタを示している. 中立曲線から正の領域では等流状態は不安定となることを意味している.

図-2(a) は浸透層が存在しない転波列の解析結果に対応している. 本理論においては混合距離理論を用いて線形安定解析を行っているが, 従来の底せん断層近似理論を用いた解析結果と比較して, 臨界フルード数に異なる傾向は見られるが, フルード数の大きい領域および卓越波数に関して非常に類似している.

図-2(b) は浸透層が水深と同程度および空隙率が 0.3, 透水性パラメータ γ および ϕ , R の値は河床材料粒径が 20cm 程度の礫のときに対応する比較的透水性の大きい場合の結果である. 結果を見ると, フルード数によらず不安定領域は存在することがわかる. また卓越波数は (a)

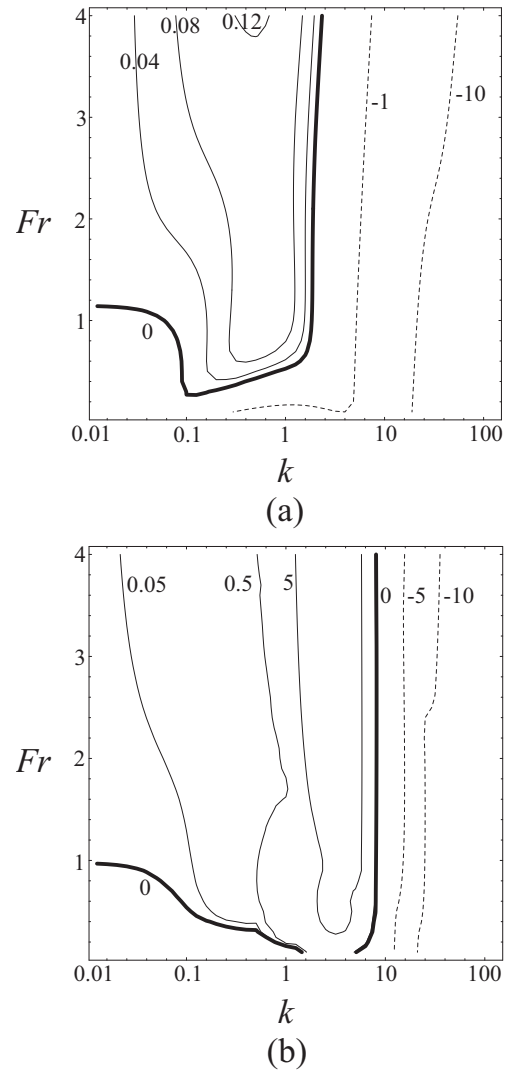


図-2 フルード数 Fr および擾乱の波数 k による発達率 Ω の等高線図. (a) 転波列 ($h=0$), (b) $h=1$, $\lambda=0.3$, $\gamma=0.02$, $\phi=3$, $R=0.025$.

において波数 0.2-0.6 程度となるが, (b) においては 2-6 程度の大きい値をとる. またその発達率の値も大きくなり, 浸透層の存在は流れの不安定性を増加させると考えられる.

5. 結論

本研究では河川流および浸透流の支配方程式を用いて線形安定解析を行った. その結果から, 浸透層は流れの不安定性を増加させ, 比較的透水性の大きい場合, 等流水深の 1-3 倍程度の波長をもった擾乱が発達することが明らかとなった.

参考文献

- 1) Dressler, R. F., Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels, Commun. Pure Appl. Maths 2, 149-194, 1949.
- 2) 日本流体力学会: 流体力学ハンドブック, 丸善, 1987.